回帰分析の用途
実験計画法の意義
グラフィカルモデリングの活用

早稲田大学　創造理工学部

経営システム工学科

永田　靖

内容

1．回帰分析の結果の解釈の仕方

2．回帰分析による要因効果の把握の困難さ

3．実験計画法の意義

4．グラフィカルモデリング

参考文献：

『統計的品質管理』（永田靖，朝倉書店，2009）

『入門実験計画法』（永田靖，日科技連，2000）

『グラフィカルモデリングの実際』（日本品質管理学会
テクノメトリックス研究会編，日科技連，1999）

1.回帰分析の結果の解釈の仕方

(1) 変数選択結果への困惑と疑問

重回帰分析のための
データ(その1)

No.	x_1	x_2	x_3	y
1	6.9	3.9	8.2	42.3
2	6.9	3.1	6.4	34.6
3	8.8	3.0	7.3	41.8
4	7.3	3.8	8.4	42.5
5	5.5	4.3	8.5	41.0
6	3.2	4.2	6.1	30.8
7	7.4	3.8	8.9	43.6
8	9.2	3.0	8.5	42.6
9	7.5	3.1	6.6	37.2
10	1.5	4.6	5.7	28.3

相関係数(その1)

	x_1	x_2	x_3	y
x_1	1	−0.843	0.617	0.833
x_2	−0.843	1	−0.114	−0.407
x_3	0.617	−0.114	1	0.927
y	0.833	−0.407	0.927	1

F 比が2以上ならその変数を重回帰式に取り込み，2未満ならその変数を重回帰式から外すという規準で変数選択.

$$\hat{y} = 6.296 + 4.313x_3 \quad (R^{*2} = 0.8419) \tag{1}$$

$$\hat{y} = 9.155 + 0.961x_1 + 3.103x_3 \quad (R^{*2} = 0.9612) \tag{2}$$

$$\hat{y} = -23.067 + 4.066x_1 + 10.092x_2 - 0.229x_3 \quad (R^{*2} = 0.9957) \tag{3}$$

$$\hat{y} = -21.130 + 3.864x_1 + 9.454x_2 \quad (R^{*2} = 0.9962) \tag{4}$$

解析者の疑問:

(A) なぜ，最初に一番影響のあったx_3が最終的には外されるのか？

(B) なぜ，偏回帰係数は(1)～(4)式により大きく値が変わるのか？

(C) なぜ，(1)式と(3)式ではx_3の偏回帰係数の符号が異なるのか？

(2) 偏回帰係数の解釈の基本

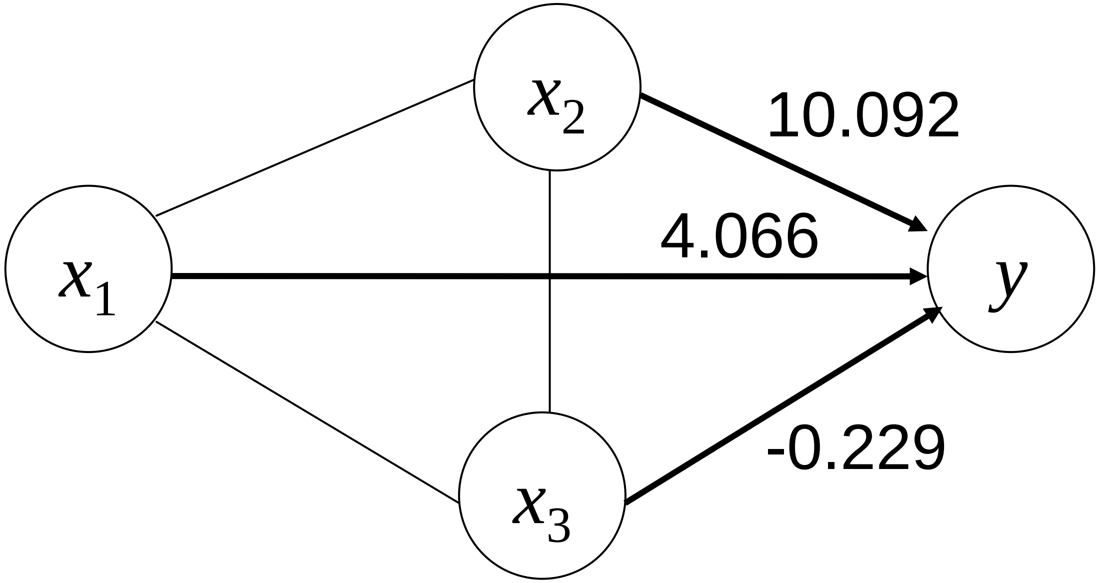
変数 x_k の偏回帰係数の解釈の仕方

(a) 重回帰式中の他の変数が固定されたもとで x_k が1単位増えるとき，y が増える量

(b) x_k が変化するとき，重回帰式中にない変数は固定されず，それらの変数の影響は x_k の偏回帰係数に算入される

y に関連する変数は x_1, x_2, x_3 の3つしかないとする

$$\hat{y} = -23.067 + 4.066x_1 + 10.092x_2 - 0.229x_3 \qquad (3)$$



(3)式に基づく変数関連図

4.066 は x_2 と x_3 が固定されたもとで
x_1 が1単位増えるときに y が増える量(の推定値)

$$\hat{y} = -23.067 + 4.066x_1 + 10.092x_2 - 0.229x_3 \qquad (3)$$

x_2 を目的変数，x_1，x_3 を説明変数として重回帰式

$$\hat{x}_2 = \boxed{3.193 - 0.308x_1 + 0.330x_3}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{y} = -23.067 + 4.066x_1$$

$$+10.092\boxed{(3.193 - 0.308x_1 + 0.330x_3)} - 0.229x_3$$

$$= (-23.067 + 10.092 \times 3.193)$$

$$+\{4.066 + 10.092 \times (-0.308)\}x_1$$

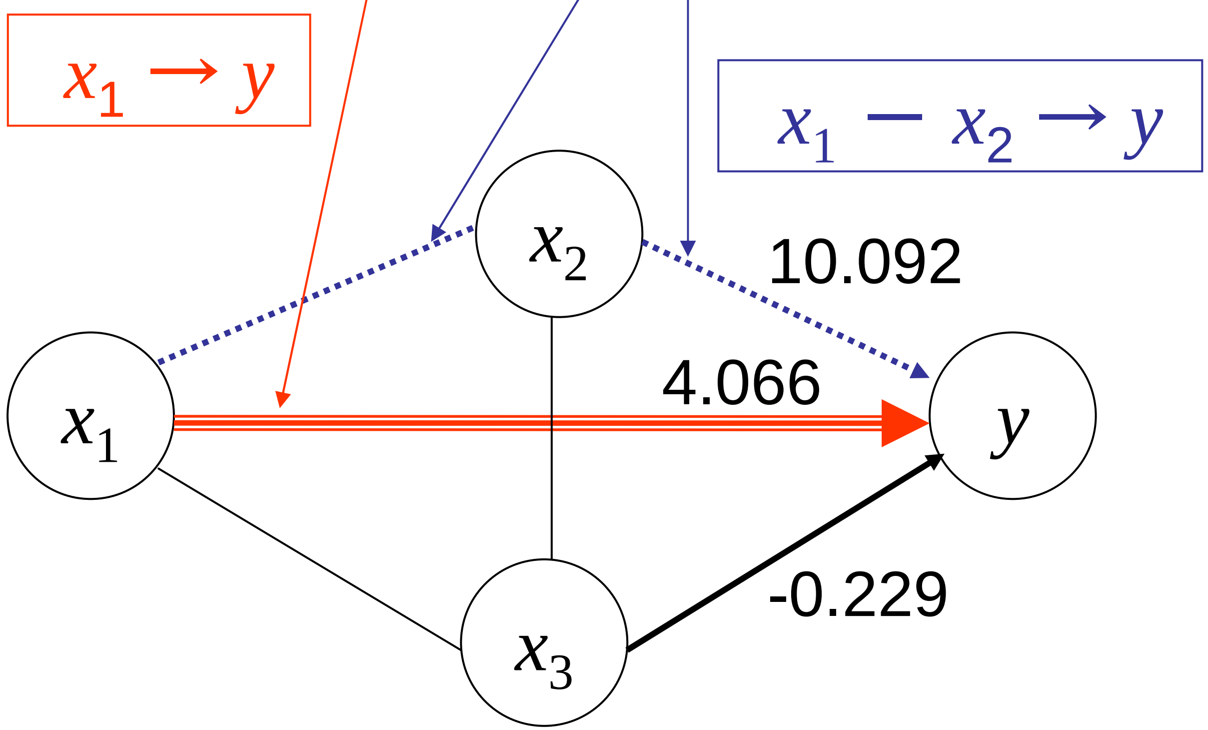
$$+(-0.229 + 10.092 \times 0.330)x_3$$

$$= 9.155 + 0.961x_1 + 3.103x_3 \qquad (= (2))$$

$$\hat{y} = 9.155 + 0.961x_1 + 3.103x_3 \qquad (= (2))$$

x_1 の偏回帰係数0.961の意味：

$$\Rightarrow \quad 0.961 = \underline{4.066} + \underline{10.092 \times (-0.308)}$$



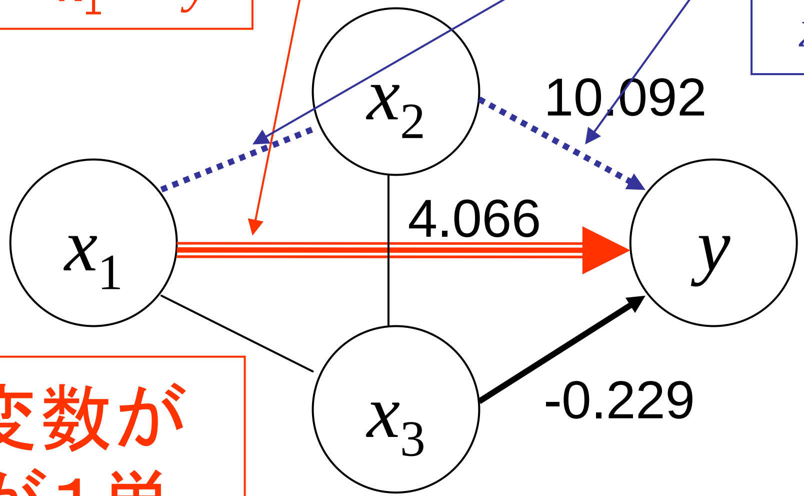
$$\hat{y} = 9.155 + 0.961x_1 + 3.103x_3 \qquad (=(2))$$

x_1 の偏回帰係数0.961の意味：

$$0.961 = \underline{4.066} + \underline{10.092 \times (-0.308)}$$

$x_1 \to y$

$x_1 - x_2 \to y$



(a)重回帰式中の他の変数が固定されたもとで x_1 が1単位増えるとき，y が増える量

(b) x_1 が変化するとき，重回帰式中にない変数は固定されず，それらの変数の影響は x_1 の偏回帰係数に算入

$$\hat{y} = 9.155 + 0.961x_1 + 3.103x_3$$

x_1 を目的変数，x_3 を説明変数として単回帰式

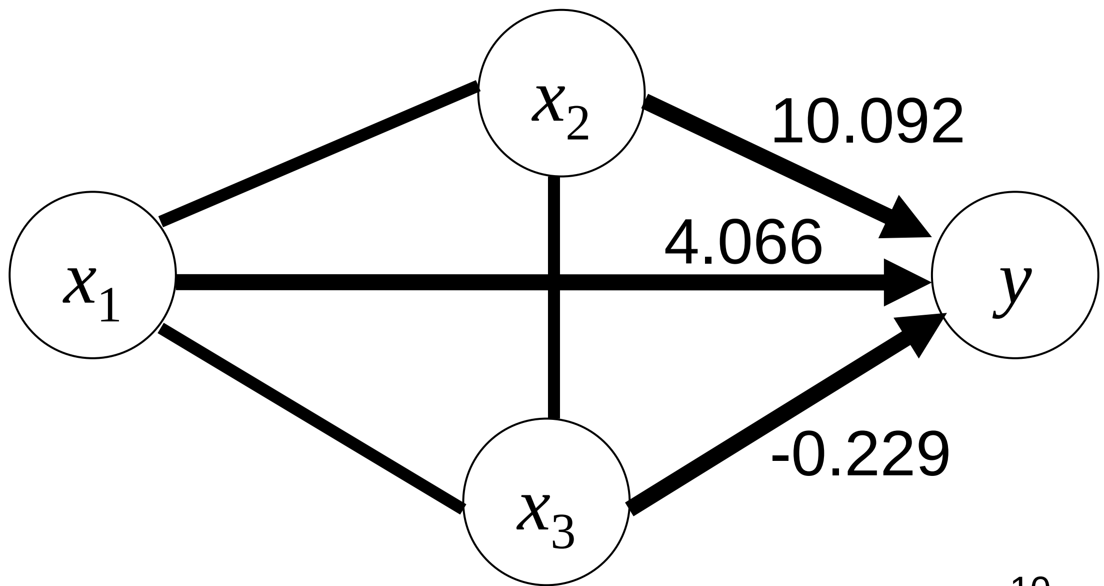
$$\hat{x}_1 = \boxed{-2.975 + 1.259x_3}$$

$$\hat{y} = 6.296 + \underline{\underline{4.313}}x_3 \qquad (1)$$

$x_3 \rightarrow y$

$x_3 - x_1 \rightarrow y$

$x_3 - x_2 \rightarrow y$



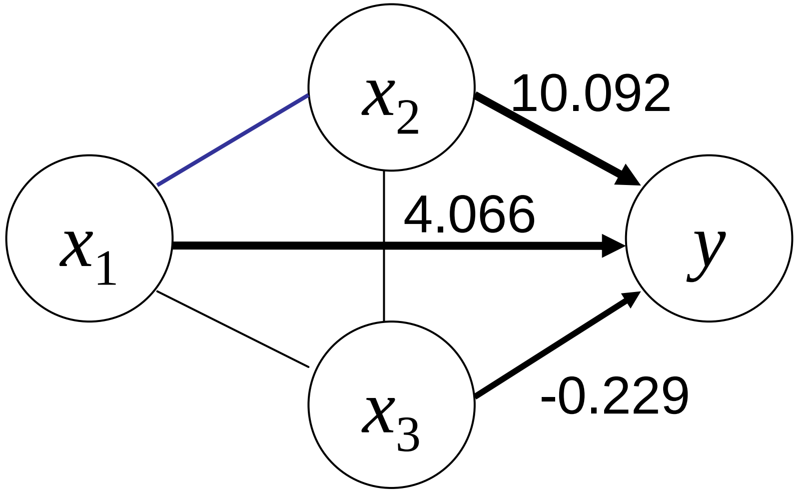
$$\hat{y} = 6.296 + \underline{\underline{4.313}}x_3 \tag{1}$$

$$\hat{y} = 9.155 + 0.961x_1 + \underline{\underline{3.103}}x_3 \tag{2}$$

$$\hat{y} = -23.067 + 4.066x_1 + 10.092x_2 \underline{\underline{-0.229}}x_3 \tag{3}$$

x_3の偏回帰係数に含まれる影響

	x_3の偏回帰係数	含まれる影響
(1)	4.313	$x_3 \to y$, $x_3 - x_1 \to y$, $x_3 - x_2 \to y$, $x_3 - x_1 - x_2 \to y$, $x_3 - x_2 - x_1 \to y$
(2)	3.103	$x_3 \to y$, $x_3 - x_2 \to y$
(3)	−0.229	$x_3 \to y$



(3) 説明変数間が無相関の場合

重回帰分析のためのデータ(その2)

No.	x_1	x_2	x_3	y
1	0.141	0.761	1.319	5.9
2	0.205	−1.385	−0.780	−7.3
3	0.880	−0.863	1.312	0.6
4	0.338	0.796	0.847	5.5
5	−0.323	1.418	−0.225	4.1
6	−1.335	−0.396	−0.288	−5.3
7	0.488	1.158	−0.683	6.2
8	1.272	0.003	−1.804	0.5
9	0.375	−1.248	0.546	−4.1
10	−2.041	−0.243	−0.244	−5.9

相関係数(その2)

	x_1	x_2	x_3	y
x_1	1	0.0001	−0.0001	0.4527
x_2	0.0001	1	0.0003	0.8389
x_3	−0.0001	0.0003	1	0.2843
y	0.4527	0.8389	0.2843	1

F比が2以上ならその変数を重回帰式に取り込み，2未満ならその変数を重回帰式から外すという規準で変数選択.

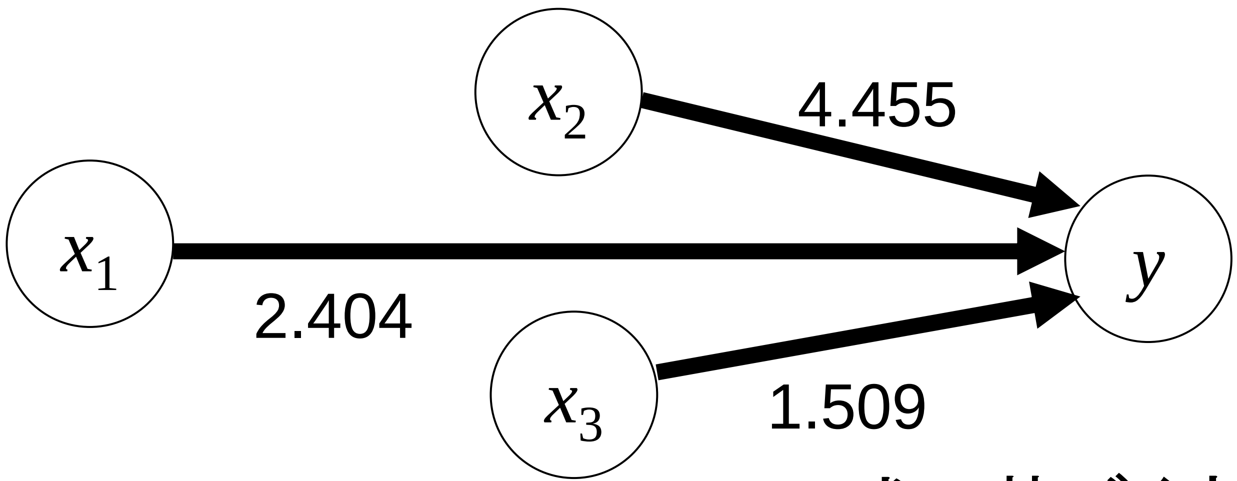
$$\hat{y} = 0.020 + 4.456x_2 \quad (R^{*2} = 0.6666) \tag{5}$$

$$\hat{y} = 0.020 + 2.404x_1 + 4.456x_2 \quad (R^{*2} = 0.8825) \tag{6}$$

$$\hat{y} = 0.020 + 2.404x_1 + 4.455x_2 + 1.509x_3 \tag{7}$$

$$(R^{*2} = 0.9840)$$

偏回帰係数はほとんど変化しない



(7)式に基づく変数関連図

1.のまとめ

・偏回帰係数は重回帰式中の他の変数を固定したもとでの効果

・偏回帰係数は重回帰式外の他の変数の影響を受ける

・説明変数間に相関があると変数選択の過程で偏回帰係数は大きく変化

2.回帰分析による要因効果の把握の困難さ

(1) 回帰分析は何の役に立つのか

回帰分析の用途:

(1)予測には有用

(2) 要因分析・制御のためには回帰分析だけでは困難

★要因分析・制御を行うには実験計画法

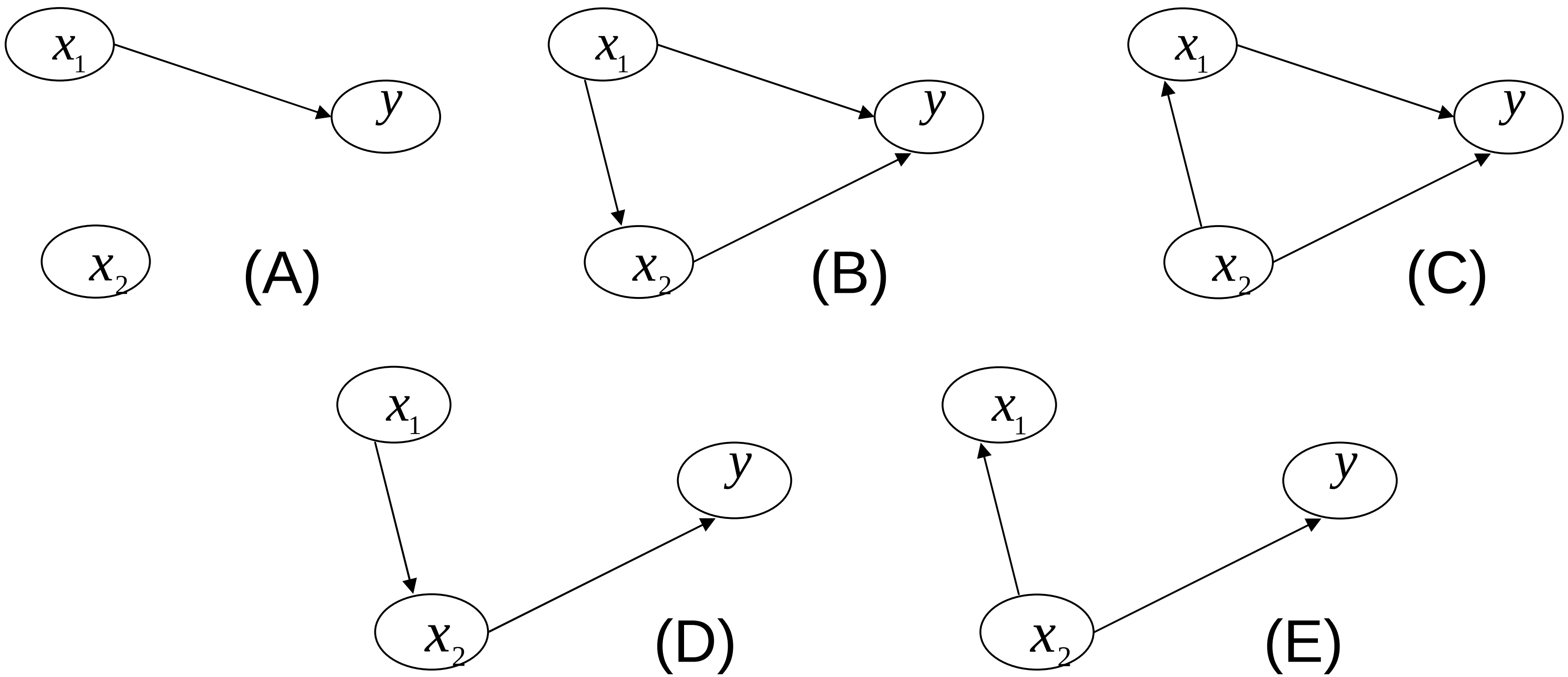
★回帰式の偏回帰係数には，説明変数から目的変数 y への直接的な影響だけでなく，その他の変数の影響が含まれてくるので，その解釈は困難

x_1 を説明変数, y を目的変数として, 単回帰式

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 \qquad (8)$$

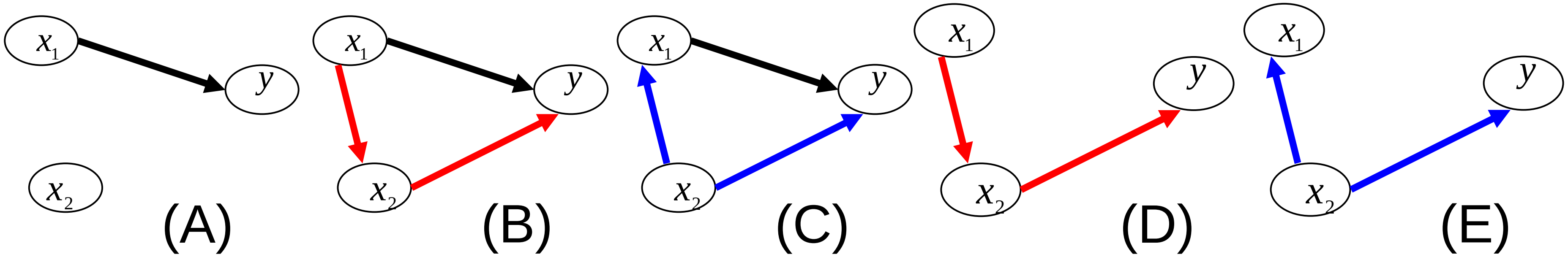
(8)式より x_1 と y についての関係を想定できるか？

観測されていない(認識されていない)別の変数 x_2 の存在の可能性を考慮して, 5つのパターン



5つのパターン

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 \quad (8)$$



各パターンと偏回帰係数との関係

	$\hat{\beta}_1$ に含まれる影響	x_1を1単位変化させるときyの変化量
(A)	$x_1 \to y$	$x_1 \to y$（直接効果）
(B)	$x_1 \to y$,　$x_1 \to x_2 \to y$	$x_1 \to y$,　$x_1 \to x_2 \to y$（総合効果）
(C)	$x_1 \to y$,　$x_1 \leftarrow x_2 \to y$	$x_1 \to y$（直接効果）
(D)	$x_1 \to x_2 \to y$	$x_1 \to x_2 \to y$（間接効果）
(E)	$x_1 \leftarrow x_2 \to y$	0

擬似相関

・どのパターンが真でも，それを知らなくても，x_1 の値を知れば，(8)式を利用して y は予測可能

・パターン図の変数間の関連情報がなくても予測可能

・ x_1 の効果（x_1 を1単位変化させるとき y の変化量）は，パターンにより異なる.

・どのパターンが真なのか未知なら，x_1 の効果は適切に判断できない.

・回帰分析で各変数の効果を見積もるには，パターンの識別が必要

・パターンを探索にはグラフィカルモデリングが有用

・グラフィカルモデリングでは偏相関係数に基づいて解析

・グラフィカルモデリング・・・独立グラフ，有向独立グラフ

・回帰分析で要因分析・制御するには，有向独立グラフを併用

2.のまとめ

・回帰分析は予測には有用

・要因分析や制御には実験計画法が有用

・回帰分析で要因分析・制御を行うには有向独立グラフを併用

3.実験計画法の意義

繰返しのない2元配置法のデータの形式

水準	B_1	B_2	B_3
A_1	$x_{11}(=y_1)$	$x_{12}(=y_2)$	$x_{13}(=y_3)$
A_2	$x_{21}(=y_4)$	$x_{22}(=y_5)$	$x_{23}(=y_6)$

$$x_{ij} = \mu + a_i + b_j + \varepsilon_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{2} a_i = a_1 + a_2 = 0,\ \sum_{i=1}^{3} b_j = b_1 + b_2 + b_3 = 0$$

$$\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$$

繰返しのない2元配置法のデータの形式

水準	B_1	B_2	B_3
A_1	$x_{11}\,(=y_1)$	$x_{12}\,(=y_2)$	$x_{13}\,(=y_3)$
A_2	$x_{21}\,(=y_4)$	$x_{22}\,(=y_5)$	$x_{23}\,(=y_6)$

$$y_1 = \mu + a_1 + b_1 + \varepsilon_1$$
$$y_2 = \mu + a_1 + b_2 + \varepsilon_2$$
$$y_3 = \mu + a_1 + b_3 + \varepsilon_3$$
$$y_4 = \mu + a_2 + b_1 + \varepsilon_4$$
$$y_5 = \mu + a_2 + b_2 + \varepsilon_5$$
$$y_6 = \mu + a_2 + b_3 + \varepsilon_6$$

$$\sum_{i=1}^{2} a_i = a_1 + a_2 = 0$$
$$\Rightarrow \quad a_2 = -a_1$$

$$\sum_{i=1}^{3} b_j = b_1 + b_2 + b_3 = 0$$
$$\Rightarrow \quad b_3 = -b_1 - b_2$$

繰返しのない2元配置法のデータの形式

水準	B_1	B_2	B_3
A_1	$x_{11}(=y_1)$	$x_{12}(=y_2)$	$x_{13}(=y_3)$
A_2	$x_{21}(=y_4)$	$x_{22}(=y_5)$	$x_{23}(=y_6)$

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \mu + a_1 + b_1 + \varepsilon_1 \\
y_2 &= \mu + a_1 + b_2 + \varepsilon_2 \\
y_3 &= \mu + a_1 - b_1 - b_2 + \varepsilon_3 \\
y_4 &= \mu - a_1 + b_1 + \varepsilon_4 \\
y_5 &= \mu - a_1 + b_2 + \varepsilon_5 \\
y_6 &= \mu - a_1 - b_1 - b_2 + \varepsilon_6
\end{aligned}
$$

$\mu = \beta_0,\quad a_1 = \beta_1,\quad b_1 = \beta_2,\quad b_2 = \beta_3$ とおくと

繰返しのない2元配置法のデータの形式

水準	B_1	B_2	B_3
A_1	$x_{11}(=y_1)$	$x_{12}(=y_2)$	$x_{13}(=y_3)$
A_2	$x_{21}(=y_4)$	$x_{22}(=y_5)$	$x_{23}(=y_6)$

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \beta_0 + \beta_1 \cdot 1 + \beta_2 \cdot 1 + \beta_3 \cdot 0 + \varepsilon_1 \\
y_2 &= \beta_0 + \beta_1 \cdot 1 + \beta_2 \cdot 0 + \beta_3 \cdot 1 + \varepsilon_2 \\
y_3 &= \beta_0 + \beta_1 \cdot 1 + \beta_2 \cdot (-1) + \beta_3 \cdot (-1) + \varepsilon_3 \\
y_4 &= \beta_0 + \beta_1 \cdot (-1) + \beta_2 \cdot 1 + \beta_3 \cdot 0 + \varepsilon_4 \\
y_5 &= \beta_0 + \beta_1 \cdot (-1) + \beta_2 \cdot 0 + \beta_3 \cdot 1 + \varepsilon_5 \\
y_6 &= \beta_0 + \beta_1 \cdot (-1) + \beta_2 \cdot (-1) + \beta_3 \cdot (-1) + \varepsilon_6
\end{aligned}
$$

繰返しのない2元配置法のデータの形式

水準	B_1	B_2	B_3
A_1	$x_{11}(=y_1)$	$x_{12}(=y_2)$	$x_{13}(=y_3)$
A_2	$x_{21}(=y_4)$	$x_{22}(=y_5)$	$x_{23}(=y_6)$

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \varepsilon_i \qquad (i = 1,2,\ldots,6)$$

上式に代入するデータ

No.	x_1	x_2	x_3	y
1	1	1	0	y_1
2	1	0	1	y_2
3	1	-1	-1	y_3
4	-1	1	0	y_4
5	-1	0	1	y_5
6	-1	-1	-1	y_6

相関係数

	x_1	x_2	x_3	y
x_1	1	0	0	r_{1y}
x_2	0	1	0.5	r_{2y}
x_3	0	0.5	1	r_{3y}
y	r_{1y}	r_{2y}	r_{3y}	1

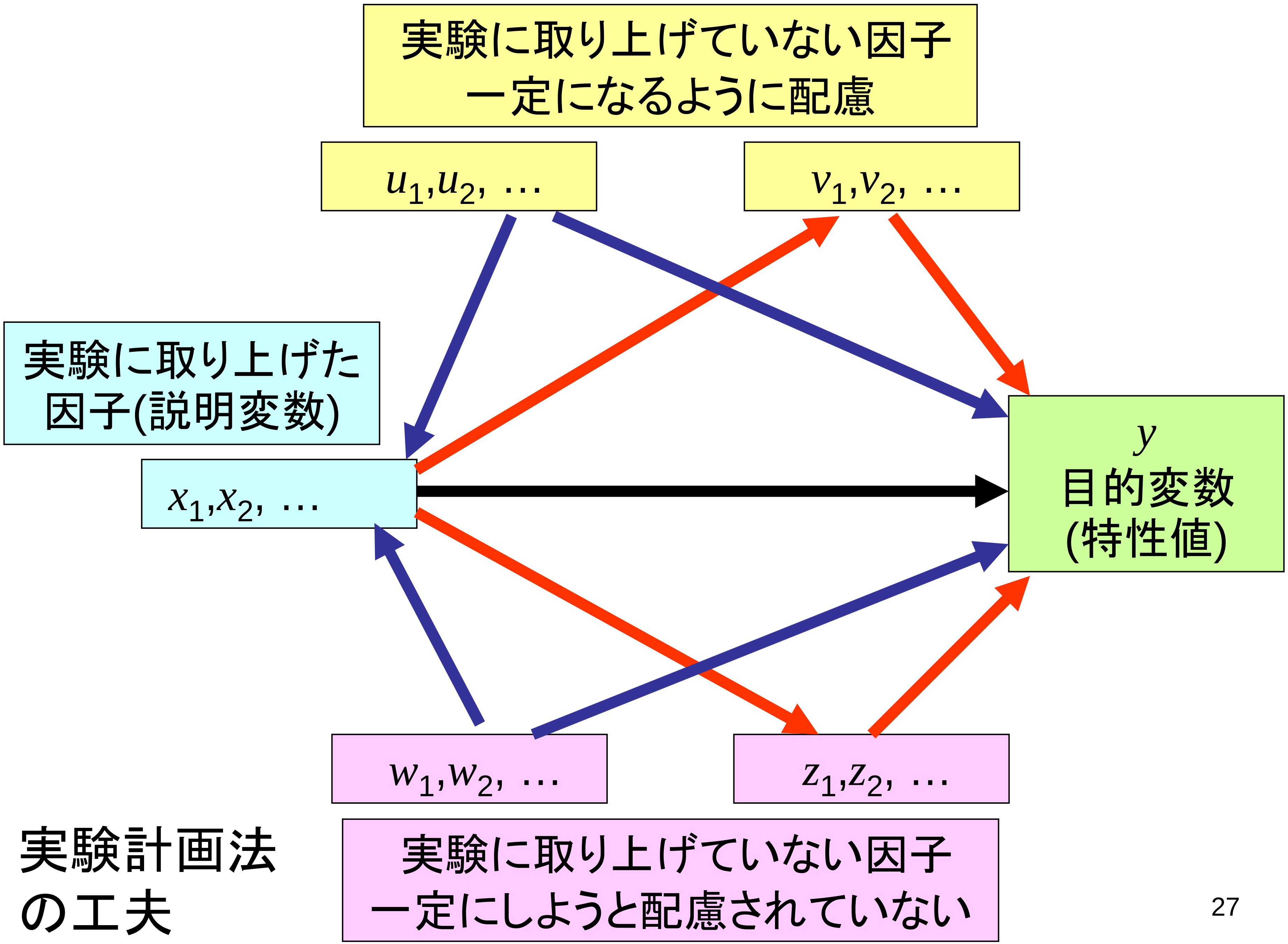
x_1 (=A)と (x_2, x_3) (=B) は無相関

・日常データなどの観察データでは，説明変数間を無相関にすることは困難

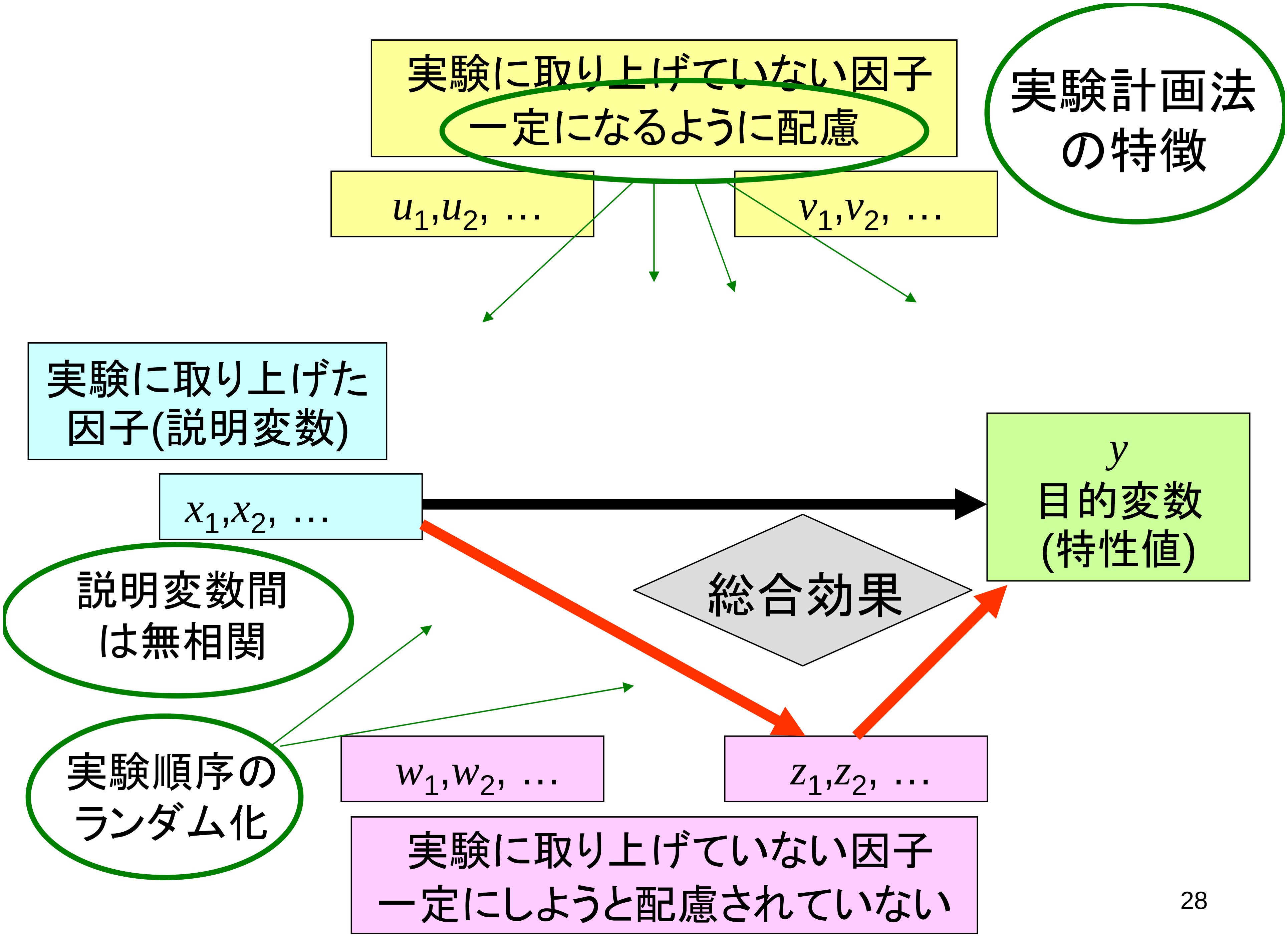
・実験計画法では各因子に対応する説明変数間が無相関になるように“計画”

・説明変数間が無相関であっても，回帰分析では観測していない他の変数の影響を受ける

・実験計画法では2つの工夫より，他変数の影響を回避
(1) 取り上げていない要因はできるだけ一定にして実験
(2) ランダムな順序で実験


実験に取り上げていない因子
一定になるように配慮
$u_1, u_2, \ldots$
$v_1, v_2, \ldots$
実験に取り上げた
因子(説明変数)
$x_1, x_2, \ldots$
y
目的変数
(特性値)
$w_1, w_2, \ldots$
$z_1, z_2, \ldots$
実験に取り上げていない因子
一定にしようと配慮されていない

実験計画法の工夫


実験に取り上げていない因子
一定になるように配慮
実験計画法
の特徴
$u_1, u_2, \ldots$
$v_1, v_2, \ldots$
実験に取り上げた
因子(説明変数)
$x_1, x_2, \ldots$
y
目的変数
(特性値)
総合効果
説明変数間
は無相関
実験順序の
ランダム化
$w_1, w_2, \ldots$
$z_1, z_2, \ldots$
実験に取り上げていない因子
一定にしようと配慮されていない

実験順序と解析方法

データの形式

水準	B_1	B_2	B_3
A_1	12	12	15
	13	13	20
A_2	15	22	19
	15	21	18

同じデータの形式であっても，データの取り方により解析方法は異なる.

① 繰返しのある2元配置法

② 乱塊法

③ 分割法

④ 繰返しのない2元配置法＋測定のみの繰返し

① 繰返しのある2元配置法

2X3X2=12回の実験をランダムな順序で実施

実験順序

水準	B_1	B_2	B_3
A_1	8 4	10 9	2 12
A_2	6 5	3 7	1 11

分散分析表

要因	平方和	自由度	平均平方	分散比
A	52.08	1	52.08	52.08/2.417=21.5**
B	39.50	2	19.75	19.75/2.417=8.17*
AXB	36.17	2	18.08	18.08/2.417=7.48*
E	14.50	6	2.417	
T	142.25	11		

② 乱塊法

第１反復$R1$:2X3=6回の実験をランダムな順序で実施

第2反復$R2$:2X3=6回の実験をランダムな順序で実施

実験順序

$R1$	B_1	B_2	B_3
A_1	5	6	2
A_2	4	1	3

$R2$	B_1	B_2	B_3
A_1	7	10	12
A_2	11	8	9

分散分析表

要因	平方和	自由度	平均平方	分散比
R	2.08	1	2.08	2.08/2.484=0.84
A	52.08	1	52.08	52.08/2.484=21.0**
B	39.50	2	19.75	19.75/2.484=7.95*
AXB	36.17	2	18.08	18.08/2.448=7.28*
E	12.42	5	2.484	
T	142.25	11		

③ 分割法

1次因子:A, 2次因子:B

第1反復$R1$:
A2のまま3回をランダムな順序
A1のまま3回をランダム順序

同様に第2反復$R2$

実験順序

$R1$	B_1	B_2	B_3
A_1	4	6	5
A_2	3	1	2

$R2$	B_1	B_2	B_3
A_1	9	8	7
A_2	11	10	12

分散分析表

要因	平方和	自由度	平均平方	分散比
R	2.08	1	2.08	2.08/6.75=0.31
A	52.08	1	52.08	52.08/6.75=7.72
E(1)	6.75	1	6.75	6.75/1.42=4.75
B	39.50	2	19.75	19.75/1.42=13.9*
AXB	36.17	2	18.08	18.08/1.42=12.7*
E	5.67	4	1.42	
T	142.25	11		

④ 繰返しのない2元配置法＋測定のみの繰返し

AとBの水準組合せ6通りを
ランダムな順序で実験し,
測定を2回繰返す

・・・実験は6回

実験順序
(かっこ内は測定順序)

水準	B_1	B_2	B_3
A_1	5 (9)(10)	3 (5)(6)	2 (3)(4)
A_2	4 (7)(8)	1 (1)(2)	6 (11)(12)

分散分析表

要因	平方和	自由度	平均平方	分散比
A	52.08	1	52.08	52.08/18.08=2.88
B	39.50	2	19.75	19.75/18.08=1.09
E(1)	36.17	2	18.08	18.08/2.417=7.48*
E(2)	14.50	6	2.417	
T	142.25	11		

同じデータの形式であっても，データの取り方により解析方法は異なる.

① 繰返しのある2元配置法

② 乱塊法

③ 分割法

④ 繰返しのない2元配置法＋測定のみの繰返し

教科書の記載順序

実験しやすい順序

3.のまとめ

・実験計画法では2つの工夫より，他変数の影響を回避
(1) 取り上げていない要因はできるだけ一定にして実験
(2) ランダムな順序で実験

・知りたい効果だけを取り出せる点が実験計画法の意義

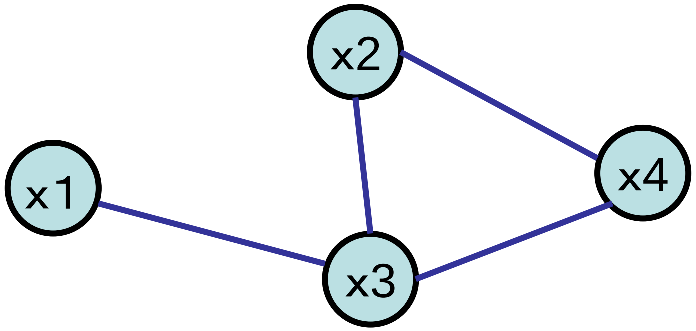
・社会科学や疫学等のように実験できない場合には，回帰分析を用いた因果推論のアプローチ

・「実験しやすい手法の順序」と「教科書での記載順序」は逆．ていねいに勉強しないと，実験方法と解析方法が不整合になる危険性

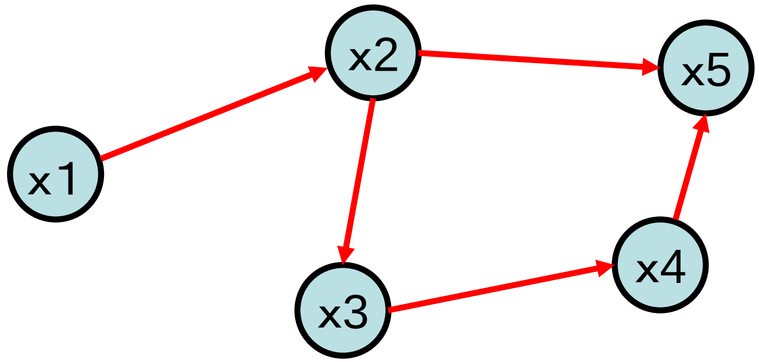
4.グラフィカルモデリング

(1) グラフィカルモデリングで作成するグラフ

無向独立グラフ

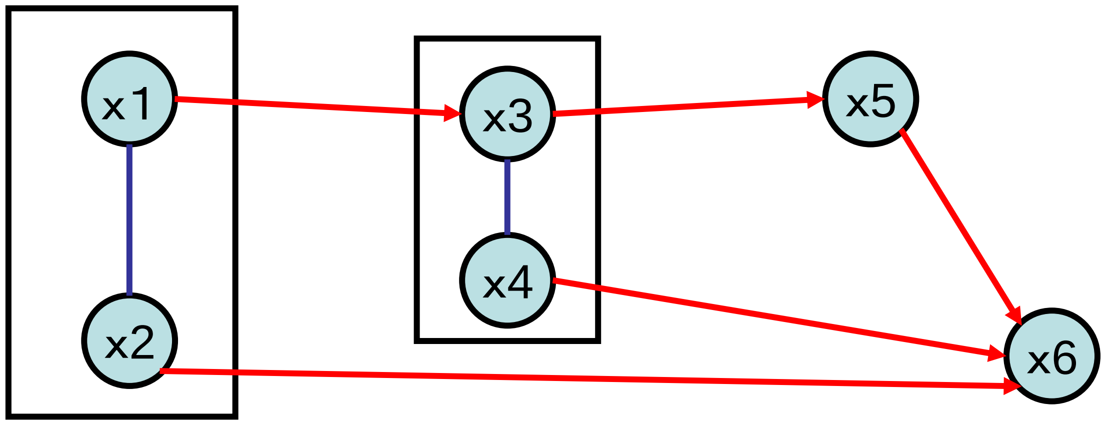


有向独立グラフ



連鎖独立グラフ

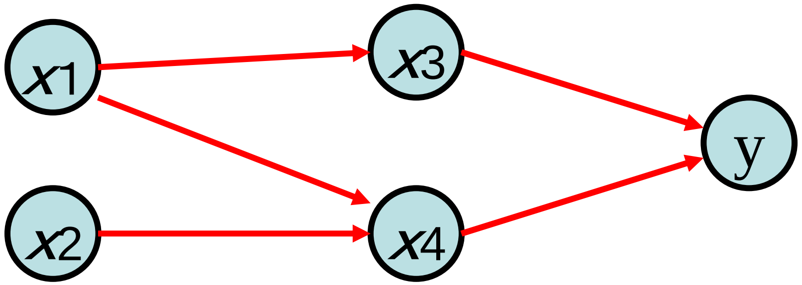
（本稿では扱わない）



(2) 回帰分析との関係

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + \varepsilon$$

もし，変数間の真の関係が



だったら，回帰分析の変数選択より

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_3 x_3 + \hat{\beta}_4 x_4$$

- y を予測するなら x_3, x_4 だけで十分
- y を制御するとき x_3, x_4 が介入しにくい変数なら x_1, x_2 に介入する

(3) 相関係数行列と偏相関係数行列

$x_1, x_2, \ldots, x_p$ に対して，

$x_3, \ldots, x_p$ を与えたとき x_1 と x_2 の標本偏相関係数 $r_{12\cdot rest} = r_{12\cdot 3\cdots p}$

$$\hat{x}_1 = \hat{a}_0 + \hat{a}_3 x_3 + \cdots + \hat{a}_p x_p$$

残差 : $e_{1\cdot 3\cdots p} = x_1 - \hat{x}_1$

$$\hat{x}_2 = \hat{b}_0 + \hat{b}_3 x_3 + \cdots + \hat{b}_p x_p$$

残差 : $e_{2\cdot 3\cdots p} = x_2 - \hat{x}_2$

⇒ $e_{1\cdot 3\cdots p}$ と $e_{2\cdot 3\cdots p}$ の標本相関係数が $r_{12\cdot rest}$

$\rho_{ij}:x_i$ と x_j の母相関係数

$x_1,x_2,\ldots,x_p$ に対して

$$\Pi=\begin{bmatrix}1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1p}\\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2p}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \rho_{p1} & \rho_{p2} & \cdots & 1\end{bmatrix}=\left[\rho_{ij}\right]$$

上付の添え字

$$\Rightarrow\quad \Pi^{-1}=\begin{bmatrix}\rho^{11} & \rho^{12} & \cdots & \rho^{1p}\\ \rho^{21} & \rho^{22} & \cdots & \rho^{2p}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \rho^{p1} & \rho^{p2} & \cdots & \rho^{pp}\end{bmatrix}=\left[\rho^{ij}\right]$$

下付の添え字

x_i と x_j の母偏相関係数

$$\rho_{ij\cdot rest}=-\frac{\rho^{ij}}{\sqrt{\rho^{ii}\rho^{jj}}}$$

（$rest$：残りの変数）

（$\rho_{ii\cdot rest}=-1$　と定める．ーと表示）

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} \\ \rho_{21} & 1 & \rho_{23} & \rho_{24} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & 1 & \rho_{34} \\ \rho_{41} & \rho_{42} & \rho_{43} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.60 & 0.60 & 0.60 \\ 0.60 & 1 & 0.36 & 0.36 \\ 0.60 & 0.36 & 1 & 0.36 \\ 0.60 & 0.36 & 0.36 & 1 \end{bmatrix}$$

相関係数行列

$$\Rightarrow \quad \Pi^{-1} = \begin{bmatrix} \rho^{11} & \rho^{12} & \rho^{13} & \rho^{14} \\ \rho^{21} & \rho^{22} & \rho^{23} & \rho^{24} \\ \rho^{31} & \rho^{32} & \rho^{33} & \rho^{34} \\ \rho^{41} & \rho^{42} & \rho^{43} & \rho^{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.688 & -0.938 & -0.938 & -0.938 \\ -0.938 & 1.563 & 0 & 0 \\ -0.938 & 0 & 1.563 & 0 \\ -0.938 & 0 & 0 & 1.563 \end{bmatrix}$$

$$\rho_{12\cdot 34} = \rho_{12\cdot rest} = -\frac{\rho^{12}}{\sqrt{\rho^{11}\rho^{22}}} = -\frac{(-0.938)}{\sqrt{2.688 \times 1.563}} = 0.458$$

$$\rho_{23\cdot 14} = \rho_{23\cdot rest} = -\frac{\rho^{23}}{\sqrt{\rho^{22}\rho^{33}}} = -\frac{0}{\sqrt{1.563 \times 1.563}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \Lambda = \begin{bmatrix} - & \rho_{12\cdot rest} & \rho_{13\cdot rest} & \rho_{14\cdot rest} \\ \rho_{21\cdot rest} & - & \rho_{23\cdot rest} & \rho_{24\cdot rest} \\ \rho_{31\cdot rest} & \rho_{32\cdot rest} & - & \rho_{34\cdot rest} \\ \rho_{41\cdot rest} & \rho_{42\cdot rest} & \rho_{43\cdot rest} & - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - & 0.458 & 0.458 & 0.458 \\ 0.458 & - & 0 & 0 \\ 0.458 & 0 & - & 0 \\ 0.458 & 0 & 0 & - \end{bmatrix}$$

偏相関係数行列

$\Pi \quad \Rightarrow \quad \Pi^{-1}$ が求まらないことがある

$x_1, x_2, \ldots, x_p$ 間に何らかの線形性があるとき　**多重共線性**

例：

- $x_1 = ax_2 + b \quad (a > 0) \quad \Rightarrow \quad \rho_{12} = 1$
- $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$

対処法：　関係式を構成している変数を解析から除外

(4) 無向独立グラフ

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{21} & 1 & \rho_{23} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.90 & 0.80 \\ 0.90 & 1 & 0.72 \\ 0.80 & 0.72 & 1 \end{bmatrix}$$

母相関係数行列

$$\Rightarrow \quad \Lambda = \begin{bmatrix} - & \rho_{12\cdot3} & \rho_{13\cdot2} \\ \rho_{21\cdot3} & - & \rho_{32\cdot1} \\ \rho_{31\cdot2} & \rho_{32\cdot1} & - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - & 0.778 & 0.502 \\ 0.778 & - & 0 \\ 0.502 & 0 & - \end{bmatrix}$$

母偏相関係数行列

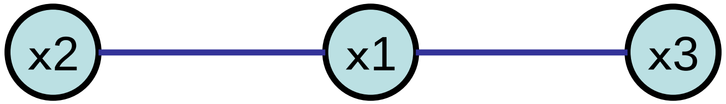
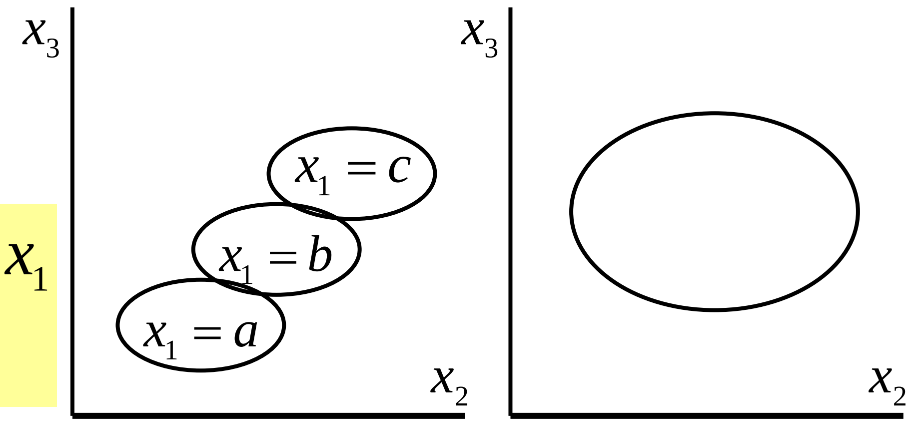


図　独立グラフ

$\rho_{23\cdot1} = 0$:　条件付き独立　$x_2 \perp x_3 \mid x_1$

($\rho_{23} = 0$:　独立　$x_2 \perp x_3$)

given という意味



$x_2 \perp x_3 \mid x_1$　　　$x_2 \perp x_3$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} - & \rho_{12\cdot rest} & \rho_{13\cdot rest} & \rho_{14\cdot rest} \\ \rho_{21\cdot rest} & - & \rho_{23\cdot rest} & \rho_{24\cdot rest} \\ \rho_{31\cdot rest} & \rho_{32\cdot rest} & - & \rho_{34\cdot rest} \\ \rho_{41\cdot rest} & \rho_{42\cdot rest} & \rho_{43\cdot rest} & - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - & 0.458 & 0.458 & 0.458 \\ 0.458 & - & 0 & 0 \\ 0.458 & 0 & - & 0 \\ 0.458 & 0 & 0 & - \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \rho_{23\cdot rest} = 0 \quad (x_2 \perp x_3 \mid (x_1, x_4))$$
$$\rho_{24\cdot rest} = 0 \quad (x_2 \perp x_4 \mid (x_1, x_3))$$
$$\rho_{34\cdot rest} = 0 \quad (x_3 \perp x_4 \mid (x_1, x_2))$$

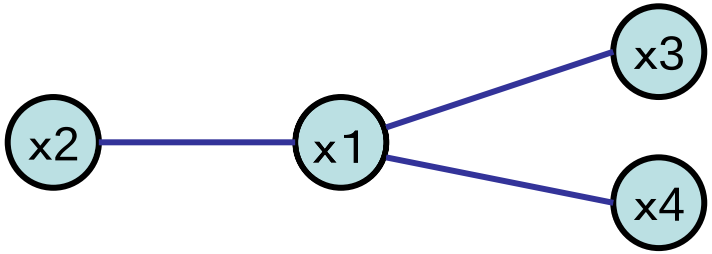


図　独立グラフ

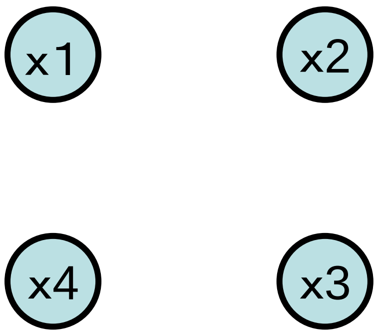
$$\Rightarrow \quad \rho_{23\cdot 1} = 0 \quad (x_2 \perp x_3 \mid x_1)$$
$$\rho_{24\cdot 1} = 0 \quad (x_2 \perp x_4 \mid x_1)$$
$$\rho_{34\cdot 1} = 0 \quad (x_3 \perp x_4 \mid x_1)$$

（例題）次の偏相関係数行列より独立グラフを作成せよ.

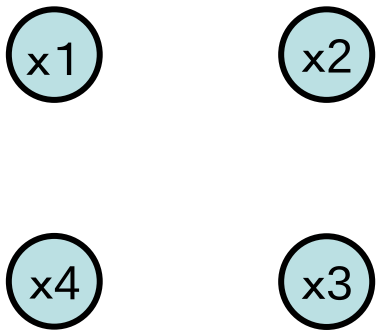
$$
(1)\ \Lambda = \begin{bmatrix} - & & & \\ 0 & - & & \\ 0 & * & - & \\ * & * & * & - \end{bmatrix}
\qquad
(2)\ \Lambda = \begin{bmatrix} - & & & \\ * & - & & \\ 0 & 0 & - & \\ * & * & 0 & - \end{bmatrix}
$$

$$(* \neq 0)$$

(1)



(2)



(5) 有向独立グラフ

$x_1, x_2, \ldots, x_p$の順序があると仮定：因果関係，時間的先行性など

$Step\,1.\quad \rho_{12}=0$　？

ここだけ相関係数

$Step\ 2.\quad \rho_{13\cdot 2}=0$　？，　$\rho_{23\cdot 1}=0$　？

（$\rho_{12\cdot 3}=0$　？の判定はしない．　$x_1 \perp x_2 \mid x_3$ は意味がない）

$Step\,3.\quad \rho_{14\cdot 23}=0$　？，　$\rho_{24\cdot 13}=0$　？，　$\rho_{34\cdot 12}=0$　？

（$\rho_{12\cdot 34}=0$　？，　$\rho_{13\cdot 24}=0$　？，　$\rho_{23\cdot 14}=0$　？　の判定はしない）

$Step\ 4\quad \rho_{15\cdot 234}=0$　？，　$\rho_{25\cdot 134}=0$　？，　$\rho_{35\cdot 124}=0$　？，　$\rho_{45\cdot 123}=0$　？

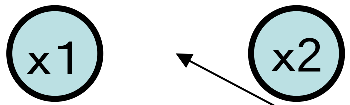
以下同様

（例）x_1, x_2, x_3, x_4 の順序があると仮定

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \rho_{12} & 1 & & \\ \rho_{13} & \rho_{23} & 1 & \\ \rho_{14} & \rho_{24} & \rho_{34} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0.50 & 0.50 & 1 & \\ 0.40 & 0.40 & 0.80 & 1 \end{bmatrix}$$

相関係数行列

$Step\,1.\quad \rho_{12} = 0$



矢印がない

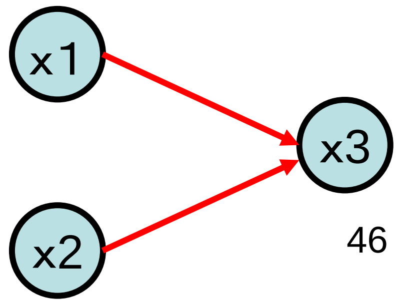
$Step\,2.$

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \rho_{12} & 1 & \\ \rho_{13} & \rho_{23} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 0.50 & 0.50 & 1 \end{bmatrix}$$

相関係数行列

偏相関係数行列

$$\Rightarrow \quad \Lambda_1 = \begin{bmatrix} - & & \\ \rho_{12\cdot 3} & - & \\ \rho_{13\cdot 2} & \rho_{23\cdot 1} & - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - & & \\ -0.33 & - & \\ 0.58 & 0.58 & - \end{bmatrix}$$



$$\rho_{13\cdot 2} = 0.58 \neq 0, \quad \rho_{23\cdot 1} = 0.58 \neq 0$$

Step 3.

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \rho_{12} & 1 & & \\ \rho_{13} & \rho_{23} & 1 & \\ \rho_{14} & \rho_{24} & \rho_{34} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0.50 & 0.50 & 1 & \\ 0.40 & 0.40 & 0.80 & 1 \end{bmatrix}$$

相関係数行列

$$\Rightarrow \Lambda = \begin{bmatrix} - & & & \\ \rho_{12\cdot rest} & - & & \\ \rho_{13\cdot rest} & \rho_{23\cdot rest} & - & \\ \rho_{14\cdot rest} & \rho_{24\cdot rest} & \rho_{34\cdot rest} & - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - & & & \\ -0.33 & - & & \\ 0.42 & 0.42 & - & \\ 0 & 0 & 0.69 & - \end{bmatrix}$$

偏相関係数行列

$$\rho_{14\cdot 23} = 0, \quad \rho_{24\cdot 13} = 0, \quad \rho_{34\cdot 12} = 0.69 \neq 0$$

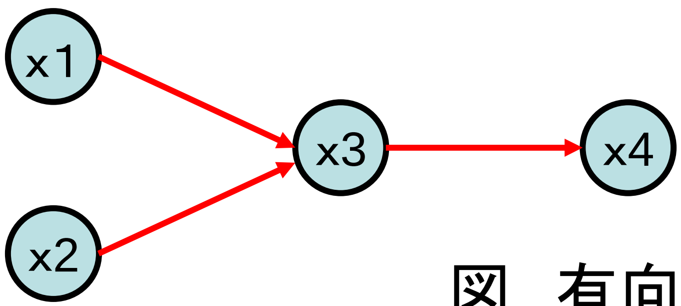


図　有向独立グラフ

（例題）x_1, x_2, x_3, x_4, x_5の順序があると仮定する.

有向独立グラフを作成せよ.

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ \rho_{12} & 1 & & & \\ \rho_{13} & \rho_{23} & 1 & & \\ \rho_{14} & \rho_{24} & \rho_{34} & 1 & \\ \rho_{15} & \rho_{25} & \rho_{35} & \rho_{45} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ * & 1 & & & \\ * & * & 1 & & \\ * & * & * & 1 & \\ * & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

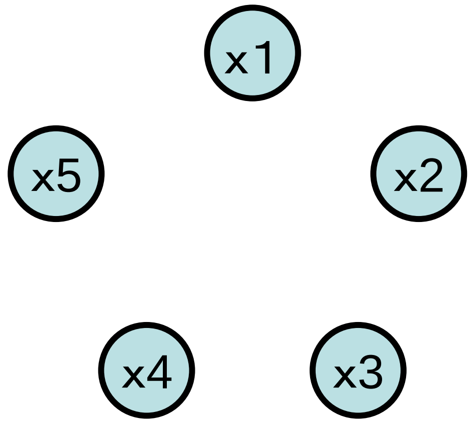
相関係数行列

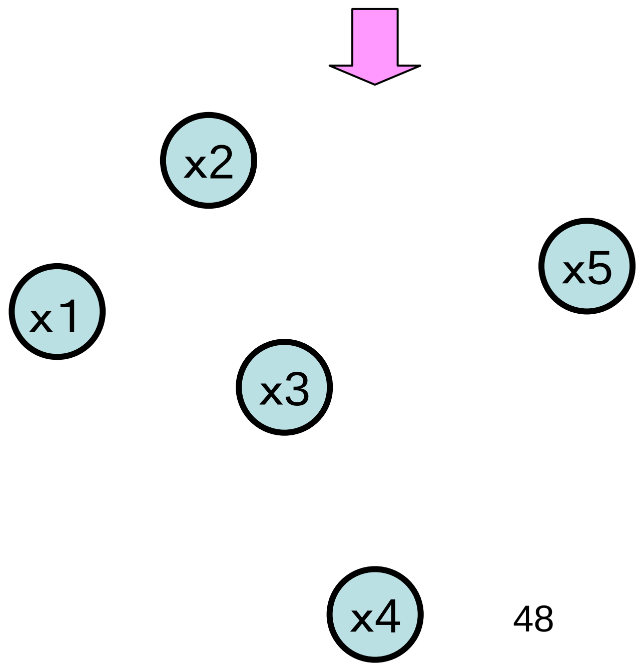
$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} - & & \\ * & - & \\ * & 0 & - \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_2 = \begin{bmatrix} - & & & \\ * & - & & \\ * & 0 & - & \\ * & 0 & 0 & - \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} - & & & & \\ * & - & & & \\ * & 0 & - & & \\ * & 0 & 0 & - & \\ * & * & 0 & 0 & - \end{bmatrix}$$

偏相関係数行列





(6) 適合度の指標

R : 最初の標本相関係数行列

$\hat{\Pi}$: モデルのもとでの標本相関係数行列

$$dev(RM) = n\log\frac{|\hat{\Pi}|}{|R|} - n\log\frac{|\hat{\Pi}_1|}{|R|}$$

n : 大 $\Rightarrow$ $dev(RM)$: 大

$GFI\ (goodness\ of\ \ fit\ index)$

$$GFI = 1 - \frac{tr[\{\hat{\Pi}^{-1}(R-\hat{\Pi})\}^2]}{tr[\{\hat{\Pi}^{-1}R\}^2]}$$

$(0 \le GFI \le 1)$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow\ tr[A] = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{pp}$（対角要素の和）

$AGFI\ (adjusted\ goodness\ of\ \ fit\ index)$

$$AGFI = 1 - \frac{p(p+1)}{2df}(1-GFI)$$

4.のまとめ

・グラフィカルモデリングでは，相関係数ではなく，偏相関係数を用いてグラフを作成する.

・偏相関係数=0は条件付き独立を意味する.

・有向独立グラフを作成することにより，変数間の関連が理解でき，回帰分析の結果を適切に解釈できる.

終

掲載されている著作物の著作権については，制作した当事者に帰属します．

著作者の許可なく営利・非営利・イントラネットを問わず，本著作物の複製・転用・販売等を禁止します．

所属および役職等は，公開当時のものです．

■公開資料ページ
弊社ウェブページで各種資料をご覧いただけます　http://www.i-juse.co.jp/statistics/jirei/

■お問い合わせ先
(株)日科技研 数理事業部 パッケージサポート係　http:/www.i-juse.co.jp/statistics/support/contact.html