



# 故障原因不明と打ち切りを含む データによる最尤推定

環境の効果を受け同時故障が生じるワイブル競合リスクモデルの場合

永井義満

明治大学

- 背景

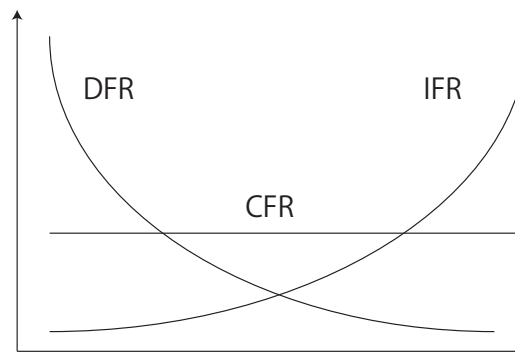
- ・ システムの信頼性の評価
- ・ 平均寿命，故障率，信頼度などの信頼性特性を把握
- ・ システムを構成するコンポーネントの寿命分布のパラメータ推定

- 寿命分布  $f(t)$

- ・ 平均寿命： $\mu = \int_0^{\infty} t f(t) dt$
- ・ 信頼度： $R(T) = \int_T^{\infty} f(t) dt$
- ・ 故障率： $\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$

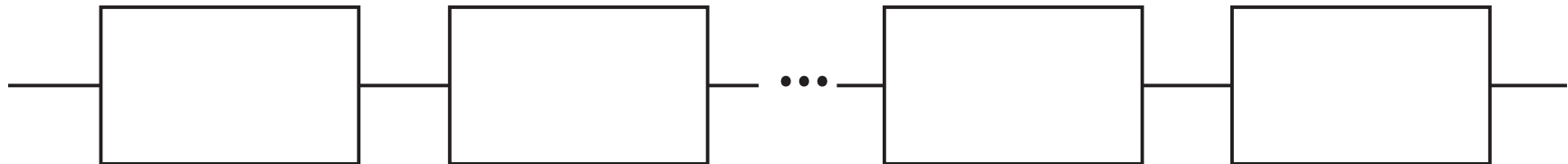
## ● 故障率のパターン

- ・ DFR：一部の電子部品，電子素子
- ・ CFR：電子部品（指数分布）
- ・ IFR：機械部品
- ・ 3つのパターンを表わすにはワイブル分布の仮定が必要



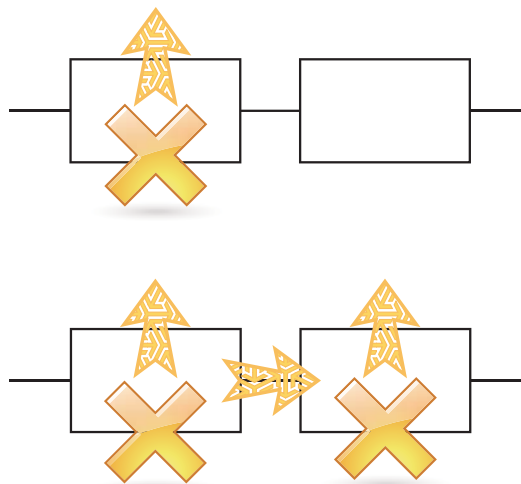
- 競合リスクモデル

- ・ 故障原因となりうるものが同時に存在しているモデル
- ・ システムの寿命  $T = \min(X_1, \dots, X_k)$



## ● 同時故障

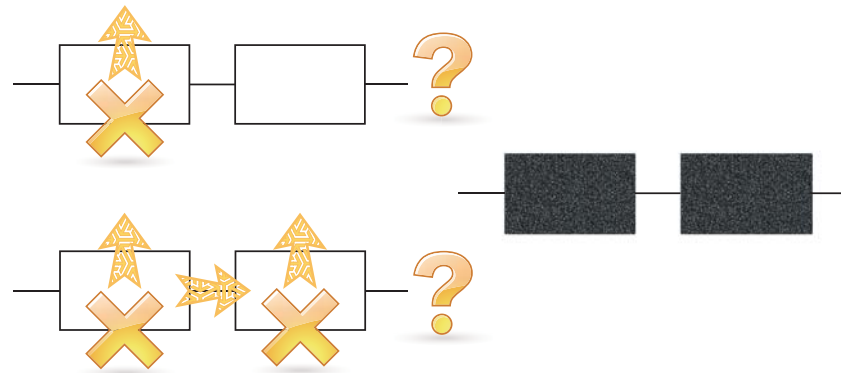
- ・ コンポーネント自体の静電気放電
- ・ 静電気放電が他のコンポーネントの静電気放電を促す
- ・ 同時故障が発生
- ・ MOB/VW 分布



- 故障原因不明
  - ・ 故障原因の調査に要するコストや時間
  - ・ 故障原因の特定が困難
  - ・ 故障原因を含むコンポーネントの集合（マスキング集合）

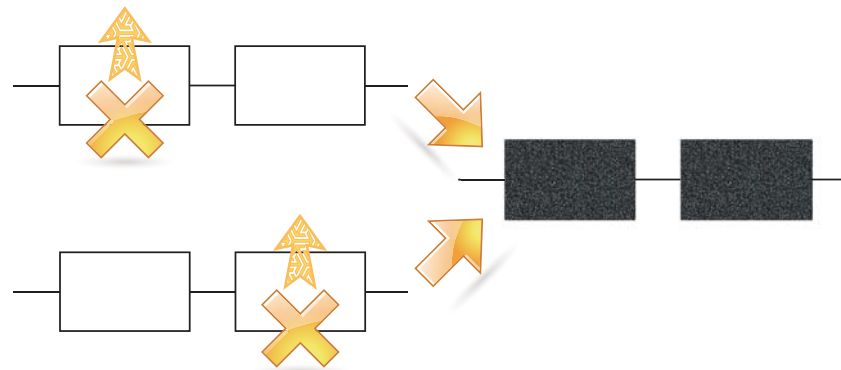
- 故障原因不明

- ・ 静電気放電でコンポーネントが焦げ付く
- ・ 他のコンポーネントを巻き込んで焦げ付く
- ・ 同時故障で焦げ付いた場合を区別できない



- 対称性の仮定

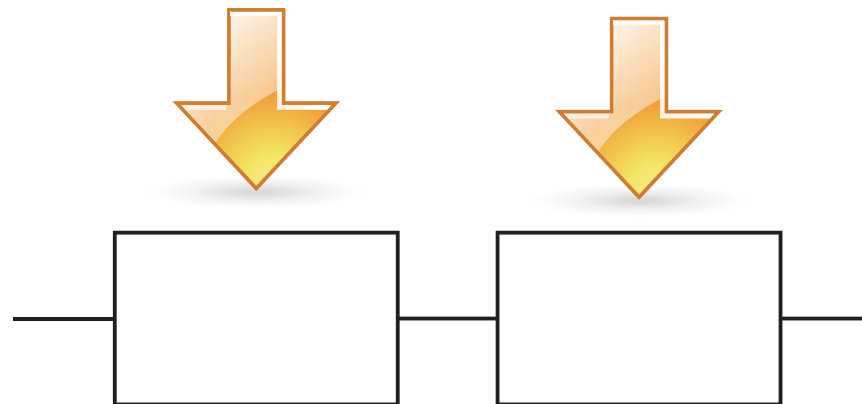
- $P_{S|j} = P_{S|j'}$
- $P_{S|j}$  : マスキング確率
- $S$  : マスキング集合,  $j, j'$  : 故障原因
- 2つのコンポーネント大きさは等しい
- 両方のコンポーネントを焦がす確率は等しい





- 環境の効果

- ・稼働中のシステム
- ・一般的な稼働条件や稼働環境を反映し，時間に因らず一定
- ・コンポーネントの故障率が $\lambda$ 倍
- ・すべてのコンポーネントに共通に働く分布（ガンマ・逆ガウス）



- 打切り
  - ・ 定時打切り (TYPEI)
  - ・ 定数打切り (TYPEII)
  - ・ 打切りの実施 → 観測終了
- プログレッシブセンサリング (Cohen(1963))
  - ・ あらかじめ設定した複数の時刻にて打切り (TYPEI)
  - ・ システムの故障時に打切り (TYPEII)

# 目的

- 環境の効果を受け同時故障が生じる競合リスクモデルにおいて、故障データの一部の故障原因がマスクされ、プログレッシブセンサリングがおこなわれるときの各コンポーネントの寿命分布（ワイブル分布）のパラメータの最尤推定

# 寿命分布

- 2コンポーネント直列システム (3ショック)
  - ショック  $i$  の寿命 :  $X_i, i = 0, 1, 2$
  - システムの寿命 :  $T = \min(X_0, X_1, X_2)$
  - 環境の効果  $Z = z$
  - $f_j(x_j|z) = \alpha_j \beta_j z t^{\beta_j - 1} \exp\{-\alpha_j z x_j^{\beta_j}\}, \alpha_j > 0, \beta_j > 0$
  - $\beta_j = \beta$

- 故障原因確率

- ・ システムの故障がショック 0 によって起きる確率

$$\Pr \{X_0 < X_1, X_0 < X_2\}$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{x_0}^\infty \int_{x_0}^\infty f(x_0, x_1, x_2 | z) g(z) dx_2 dx_1 dx_0 dz \\ &= \frac{\alpha_0}{\alpha} \equiv \pi_0 \end{aligned}$$

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2$$

環境の効果の分布 ( $g(z)$ ) に因らない

- ・  $\pi_1, \pi_2$  も同様

- 環境の効果の分布

- ・ ガンマ分布

$$g_G(z) = \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{a}}}{\Gamma\left(\frac{1}{a}\right)} z^{\frac{1}{a}-1} \exp\left\{-\frac{z}{a}\right\}$$

$$E[Z] = 1, V[Z] = a$$

- ・ 逆ガウス分布

$$g_I(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu z^3}} \exp\left\{-\frac{(z-1)^2}{2\nu z}\right\}$$

$$E[Z] = 1, V[Z] = \nu$$

# システムの故障時間の分布（ガンマ分布）

- $T$  の周辺密度関数

$$f_G(t) = \int_0^\infty f_T(t|z)g_G(z)dz = \frac{\alpha\beta t^{\beta-1}}{(\alpha at^\beta + 1)^{\frac{1}{a}+1}}$$

- $T$  のハザード関数と累積ハザード関数

$$h_G(t) = \frac{\alpha\beta t^{\beta-1}}{\alpha at^\beta + 1}$$

$$H_G(t) = \frac{1}{a} \log(\alpha at^\beta + 1)$$

- $T$  の期待値と分散

$$E_G[T] = \frac{\Gamma[\frac{1}{a} - \frac{1}{\beta}] \Gamma[1 + \frac{1}{\beta}]}{\Gamma[\frac{1}{a}]} \cdot \frac{1}{(\alpha a)^{\frac{1}{\beta}}}$$

$$V_G[T] = \frac{\Gamma(\frac{1}{a} - \frac{2}{\beta}) \Gamma(1 + \frac{2}{\beta})}{\Gamma(\frac{1}{a})} \cdot \frac{1}{(\alpha a)^{\frac{2}{\beta}}} - \frac{\Gamma^2(\frac{1}{a} - \frac{1}{\beta}) \Gamma^2(1 + \frac{1}{\beta})}{\Gamma^2(\frac{1}{a})} \cdot \frac{1}{(\alpha a)^{\frac{2}{\beta}}}$$

## システムの故障時間の分布（逆ガウス分布）

- $T$  の周辺密度関数

$$f_I(t) = \frac{\alpha\beta t^{\beta-1}}{\sqrt{1+2\alpha\nu t^\beta}} \exp \left\{ \frac{1-\sqrt{1+2\alpha\nu t^\beta}}{\nu} \right\}$$

- $T$  のハザード関数と累積ハザード関数

$$h_I(t) = \frac{\alpha\beta}{\sqrt{1+2\alpha\nu t^\beta}}, \quad H_I(t) = \frac{1}{\nu} \left( \sqrt{1+2\alpha\nu t^\beta} - 1 \right)$$

- $T$  の期待値と分散（ $K_x(y)$ ：第2種変形ベッセル関数）

$$E_I [T] = \frac{2}{\sqrt{2\pi\nu}} \exp \left\{ \frac{1}{\nu} \right\} K_{\frac{1}{2} + \frac{1}{\beta}} \left( \frac{1}{\nu} \right) \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{\beta}}} \Gamma \left( 1 + \frac{1}{\beta} \right)$$

$$V_I [T] = \frac{2}{\sqrt{2\pi\nu}} \exp \left\{ \frac{1}{\nu} \right\} K_{\frac{1}{2} + \frac{2}{\beta}} \left( \frac{1}{\nu} \right) \frac{1}{\alpha^{\frac{2}{\beta}}} \Gamma \left( 1 + \frac{2}{\beta} \right) -$$

$$\left\{ \frac{2}{\sqrt{2\pi\nu}} \exp \left\{ \frac{1}{\nu} \right\} K_{\frac{1}{2} + \frac{1}{\beta}} \left( \frac{1}{\nu} \right) \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{\beta}}} \Gamma \left( 1 + \frac{1}{\beta} \right) \right\}^2$$



# 尤度関数

- 2 コンポーネント直列システム (3 ショック)
  - $n$  個のシステム
  - $t_i$  :  $i$  番目のシステムの寿命 ( $i = 1, \dots, m$ )
  - $T_i$  : 打切り時刻 (TYPE I) ( $\ell = 1, \dots, k$ )
  - 対称性の仮定 :  $p_{S|j} = p_{S|j'}, j, j' \in S$
  - $\pi_i$  : システムの故障がショック  $i$  によって起きる確率
  - $R_\ell$  : 打切り数 (TYPE I)
  - $R_i$  : 打切り数 (TYPE II)

# 尤度関数

- 尤度関数

- $$L_I = \prod_{i=1}^m \left[ f(t_i) p_{S_i} \sum_{j \in S_i} \pi_j \right] \prod_{\ell=1}^k [1 - F(T_\ell)]^{R_\ell}$$
$$= \prod_S p_S^{n_S} \prod_S \left( \sum_{j \in S} \pi_j \right)^{n_S} \prod_{i=1}^m f(t_i) \prod_{\ell=1}^k [1 - F(T_\ell)]^{R_\ell}$$
$$= L_p \times L_c \times L_T$$
- $$L_{II} = \prod_{i=1}^m \left[ f(t_i) \prod_{\ell=1}^{R_i} \{1 - F(t_i)\} p_{S_i} \sum_{j \in S_i} \pi_j \right]$$
$$= \prod_S p_S^{n_S} \prod_S \left( \sum_{j \in S} \pi_j \right)^{n_S} \prod_{i=1}^m f(t_i) \{1 - F(t_i)\}^{R_i}$$
$$= L_p \times L_c \times L_T$$

# 尤度関数

- $L_T(\text{TypeI})$

- $\left\{ \prod_{i=1}^m \frac{\alpha \beta t_i^{\beta-1}}{(\alpha a t_i^\beta + 1)^{\frac{1}{a} + 1}} \right\} \left\{ \prod_{\ell=1}^k \frac{1}{(\alpha a T_\ell^\beta + 1)^{\frac{R_\ell}{a}}} \right\}$

- 

- $\left\{ \prod_{i=1}^m \frac{\alpha \beta t_i^{\beta-1}}{\sqrt{1+2\alpha \nu t_i^\beta}} \exp\left\{ \frac{1 - \sqrt{1+2\alpha \nu t_i^\beta}}{\nu} \right\} \right\} \left\{ \prod_{\ell=1}^k \exp\left\{ \frac{1 - \sqrt{1+2\alpha \nu T_\ell^\beta}}{\nu} \right\} \right\}^{R_\ell}$

# 尤度関数

- $L_T$ (Typell)

- $$\prod_{i=1}^m \left\{ \frac{\alpha \beta t_i^{\beta-1}}{(\alpha a t_i^\beta + 1)^{\frac{1}{a} + 1}} \prod_{\ell=1}^{R_i} \frac{1}{(\alpha a t_\ell^\beta + 1)^{\frac{1}{a}}} \right\}$$

- 

- $$\prod_{i=1}^m \left\{ \frac{\alpha \beta t_i^{\beta-1}}{\sqrt{1 + 2\alpha \nu t_i^\beta}} \exp \left\{ \frac{1 - \sqrt{1 + 2\alpha \nu t_i^\beta}}{\nu} \right\} \prod_{\ell=1}^{R_i} \exp \left\{ \frac{1 - \sqrt{1 + 2\alpha \nu t_\ell^\beta}}{\nu} \right\} \right\}$$

# 尤度関数

$$L_P(p_{02}, p_{01}, p_{012}) = (1 - p_{01} - p_{012})^{n_1} \\ \times (1 - p_{02} - p_{012})^{n_2} (1 - p_{02} - p_{01} - p_{012})^{n_0} \\ \times p_{02}^{n_{02}} p_{01}^{n_{01}} p_{012}^{n_{012}}$$

$$L_C(\pi_1, \pi_2) = \pi_1^{n_1} \pi_2^{n_2} (1 - \pi_1 - \pi_2)^{n_3} (\pi_1 + \pi_2)^{n_{12}} \\ \times (1 - \pi_1)^{n_{23}} (1 - \pi_2)^{n_{31}}$$

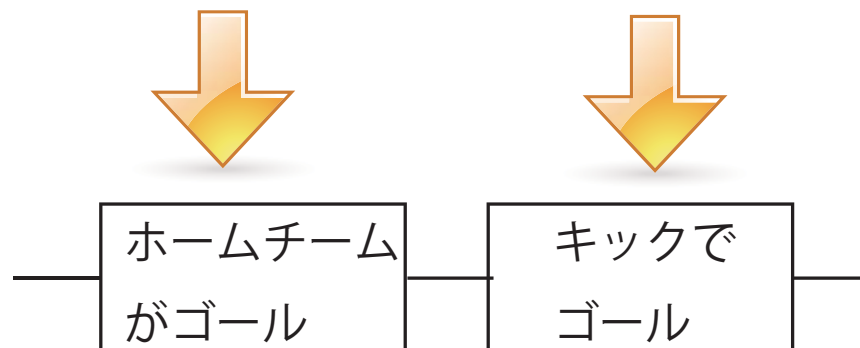
- $(\hat{\pi}_1, \hat{\pi}_2, \hat{p}_{02}, \hat{p}_{01}, \hat{p}_{012})$  は , 環境の分布に因らない
- $\hat{\alpha}, \hat{a}, \hat{\nu}$  は , システムの故障時間のみ因る推定量
- $\hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha} \hat{\pi}_1, \hat{\alpha}_2 = \hat{\alpha} \hat{\pi}_2, \hat{\alpha}_0 = \hat{\alpha} (1 - \hat{\pi}_1 - \hat{\pi}_2)$

# 実データの当てはめ (*Meintanis(2007)*)

- UEFA チャンピオンズリーグ '04-'05 , '05-'06
- (i) 少なくともホームチームが1ゴールする
- (ii) 少なくともキックで1ゴールする
- (i) , (ii) を満たす 37 試合が対象
- 最初にゴールが決まった時間

# 実データの当てはめ

- (ショック1) 任意のチームが最初にキックでゴール
- (ショック2) ホームチームが最初にゴール
- (ショック0) ホームチームが最初にキックでゴール
- 各ショックの生起時間はMOBVW分布に従う
- 対称性の仮定成立 (疑似マスキング, 故障時に2つ打ち切り)



# 実データの当てはめ

- 故障時間 (m) とマスキング集合

(2, {0}), (2\*, -), (2\*, -), (3, {0, 1, 2}),  
(3\*, -), (3\*, -), (3, {2}), (3\*, ), (3\*, ), (8, {0, 1, 2}),  
(8\*, -), (8\*, -), (11, {2}), (11\*, -),  
(11\*, -), (13, {2}), (13\*, -), (13\*, -),  
(14, {2}), (14\*, -), (14\*, -), (14, {2}),  
(14\*, -), (14\*, -) (15, {2}), (15\*, -),  
(15\*, -), (18, {0}), (18\*, -), (18\*, -),  
(28, {2}), (28\*, -) (28\*, -), (36, {0, 1, 2}),  
(36\*, -), (36\*, -), (36\*, -)



# 実データの当てはめ

- ガンマ分布

- $\hat{\alpha} = 0.00759, \hat{\beta} = 1.37, \hat{a} = 0.0005333$

- 逆ガウス分布

- $\hat{\alpha} = 0.00756, \hat{\beta} = 1.37, \hat{\nu} = 0.00893$

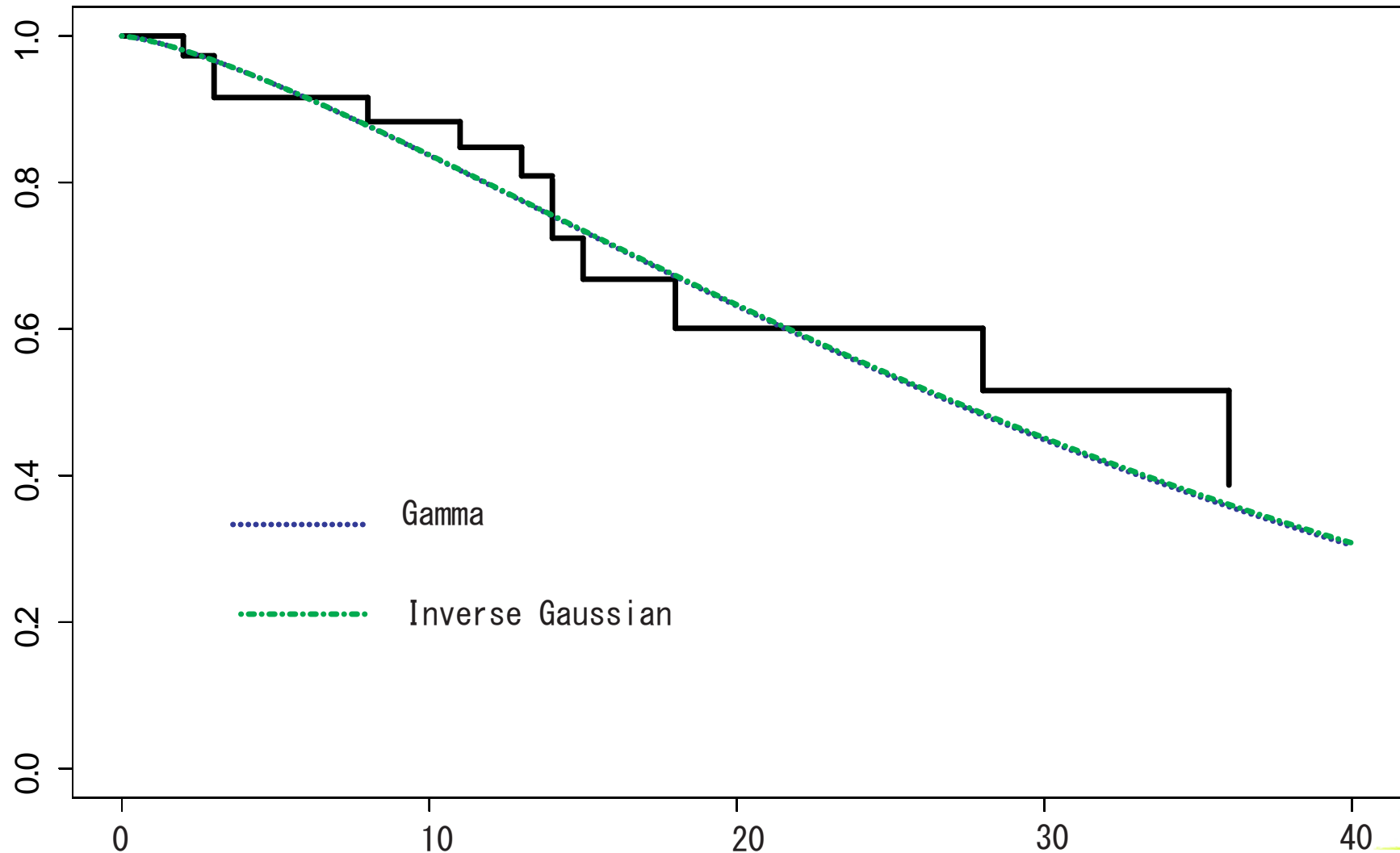
- 故障原因確率 , マスキング確率

- $\hat{\pi}_1 = 0, \hat{\pi}_2 = 0.778, \hat{p}_{02} = 0, \hat{p}_{01} = 0, \hat{p}_{012} = 0.25$

# 実データの当てはめ

- モデル選択
  - $AIC_c$  で評価
  - サンプルサイズ  $:n$  / パラメータ数  $:k$   $< 40$  のとき使用
  - $AIC_c = AIC + \frac{2k(k+1)}{n-k-1}$
  - $AIC_c$ : 118.46(ガンマ), 118.46(逆ガウス)
  - $AIC_c$  の点では, どちらのモデルを採用してもよい

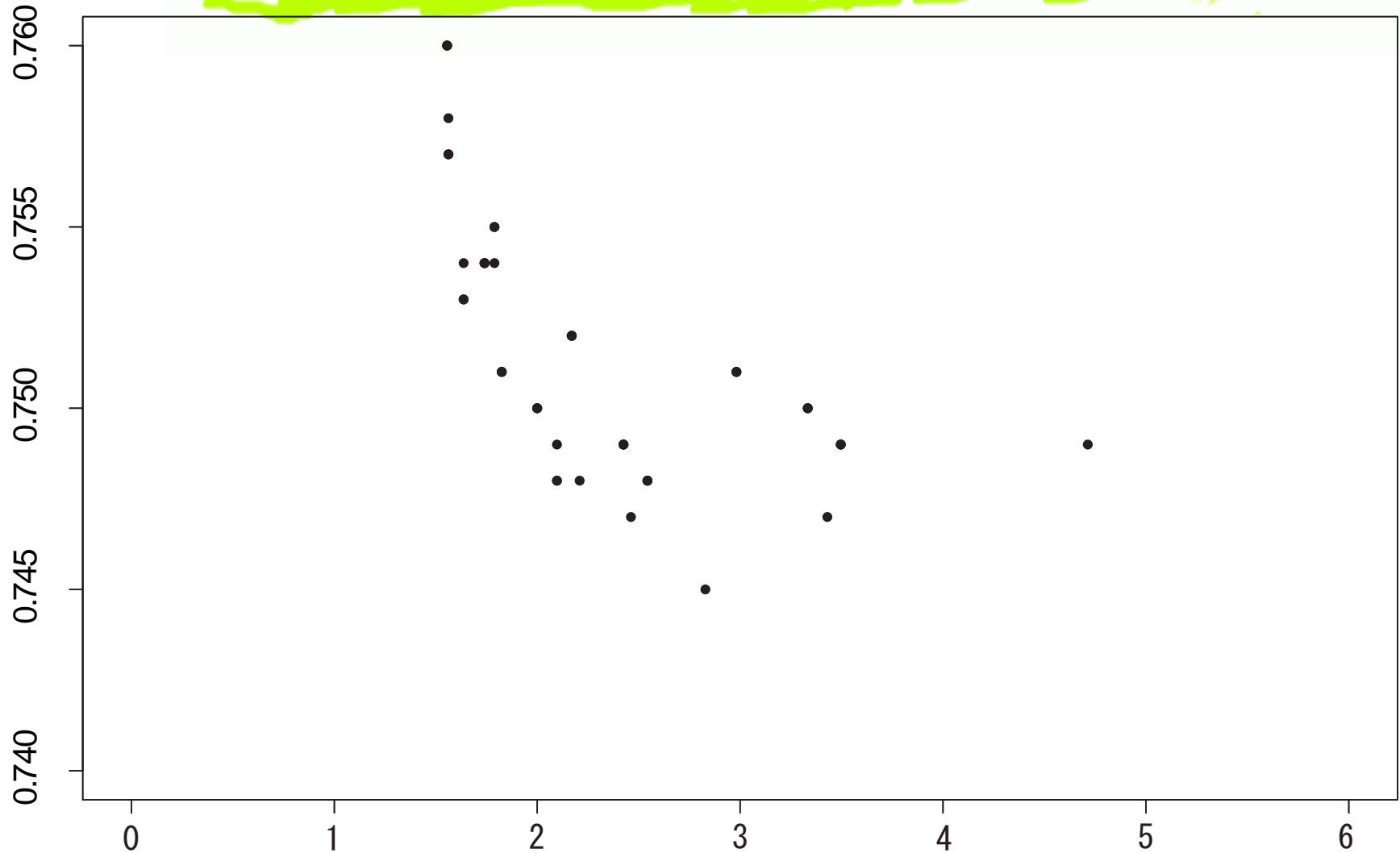
# 実データの当てはめ



# シミュレーション

- TYPEII プログレッシブセンサリング
- 故障時に3つ打ち切り
- サンプルサイズ： $n = 200, 400$
- サンプル数：1000個 × 10回
- $\alpha_1 = 0.2, \alpha_2 = 0.3$
- $\alpha_0 = 0.4, 1.2, 2.0, 2.8, 3.6$
- $(a, \nu) = (0.333, 0.689), (0.333, 0.5), (0.333, 0.450)$
- マスキング確率： $(p_{02}, p_{01}, p_{012}) =$   
 $(0.3, 0.4, 0.2), (0.3, 0.4, 0.1), (0.3, 0.4, 0.05),$   
 $(0.2, 0.4, 0.2), (0.2, 0.4, 0.1), (0.2, 0.4, 0.05),$   
 $(0.1, 0.4, 0.2), (0.1, 0.4, 0.1), (0.1, 0.4, 0.05), (0, 0, 0)$

# シミュレーション



$\hat{\alpha}_1^G$  の相対誤差 (n=400)

# シミュレーション

- $\hat{\alpha}_1^G$  の相対誤差は，故障原因がショック 1 だと判明する期待システム数の平方根に反比例している（ $\hat{\pi}_1, \hat{\pi}_2, \hat{\alpha}_1^I, \hat{\alpha}_2^G, \hat{\alpha}_2^I, \hat{\alpha}_0^G, \hat{\alpha}_0^I$  の相対誤差についても同様）
- 調査したシステムのうち 6 個ほどショック 1 が故障原因であると判明したならば，相対誤差は 0.75 程度に抑えられる．

# まとめ

- 環境の効果を受け同時故障が生じる競合リスクモデルにおいて故障データの一部の故障原因がマスクされ、プログレッシブセンサリングがおこなわれるモデルを示し、各コンポーネントの寿命分布（MOBVW分布）のパラメータの最尤推定量を得た．
- サンプルサイズが小さい時の対応
- 階層ベイズ推定量

掲載されている著作物の著作権については、制作した当事者に帰属します。

著作者の許可なく営利・非営利・イントラネットを問わず、本著作物の複製・転用・販売等を禁止します。

所属および役職等は、公開当時のものです。

■公開資料ページ

弊社ウェブページで各種資料をご覧ください <http://www.i-juse.co.jp/statistics/jirei/>

■お問い合わせ先

(株)日科技研 数理事業部 パッケージサポート係 <http://www.i-juse.co.jp/statistics/support/contact.html>