確率紙における推定パラメータの区間推定

（株）日本科学技術研修所
長谷和彦

確率紙を用いたパラメータ推定

◆製品全体の故障時間分布を知りたい.

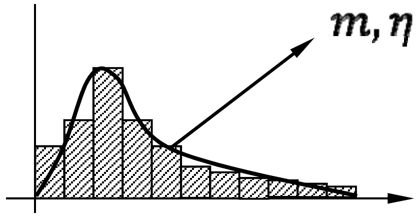
製品全体

故障時間線図

N個

稼動時間

故障時間の分布



m, η 確率分布の母数
(ワイブル分布を想定)

稼動時間

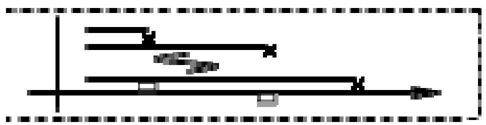
製品全ての故障時間を測定するのはほぼ無理.

1)連続分布(ワイブル分布等)を仮定し,数個のパラメータで把握する.

2)製品をサンプリングして故障時間を測定し,パラメータを推定する.

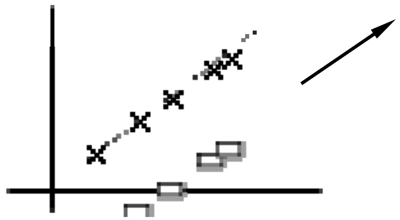
サンプリング

n個



稼動時間

確率紙



$\hat{m}, \hat{\eta}$ 推定パラメータ

◆推定パラメータはサンプリングにより変化する.

形状母数(ワイブル)の推定値がどの程度のばらつくのかを調べ定式化.

目次

◆サンプリングによる推定パラメータのばらつき

ワイブル分布

$$F(t) = \int_0^t \frac{m}{\eta}\left(\frac{s}{\eta}\right)^{m-1} e^{-\left(\frac{s}{\eta}\right)^m} ds = 1\text{-}e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^m}$$ → m

正規分布

$$F(t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(s-\mu)^2}{2\sigma^2}} ds = \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$$ → 1/σ

◆確率紙でパラメータを推定する仕組み

◆確率紙における回帰線の傾きの分散の定式化

◆シミュレーション結果との比較

◆確率紙における回帰線の傾きの分布を変換

◆シミュレーション結果との比較②

◆今後

サンプリングによる推定パラメータのばらつき

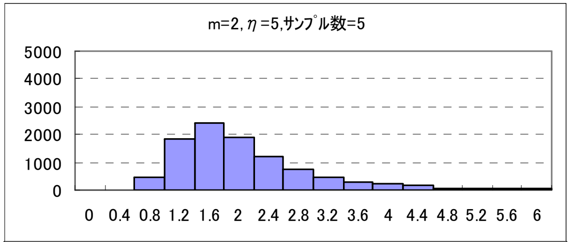
◆乱数を生成し,各サンプル数において確率紙を用いた，形状母数の推定値の分布を調べた.

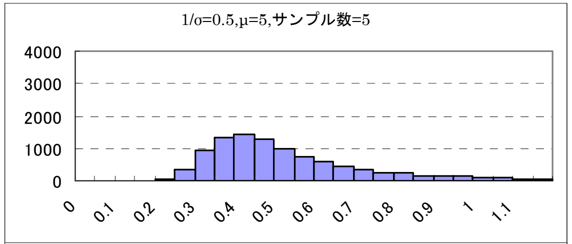
推定値は確率紙上では回帰線の傾きとなる.

ワイブル確率紙の場合：m　　正規確率紙の場合：1/σ

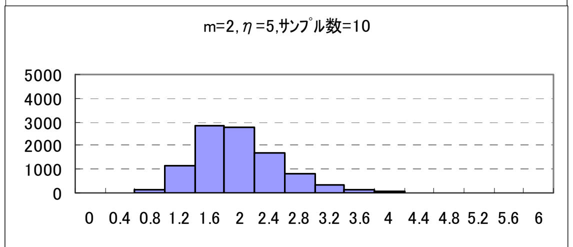
サンプリングを1万回繰り返して作成したヒストグラム.

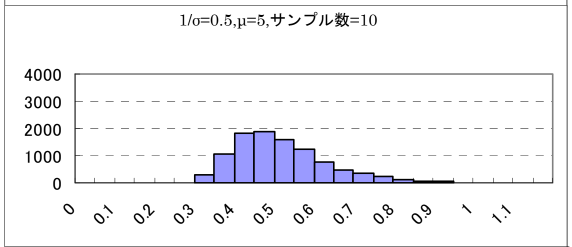
サンプル数:5





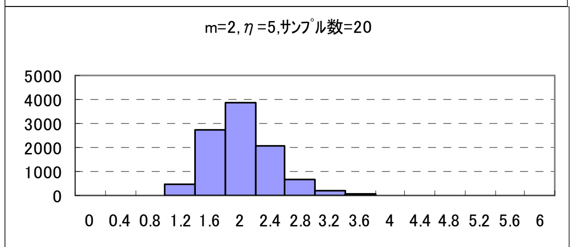
サンプル数:10

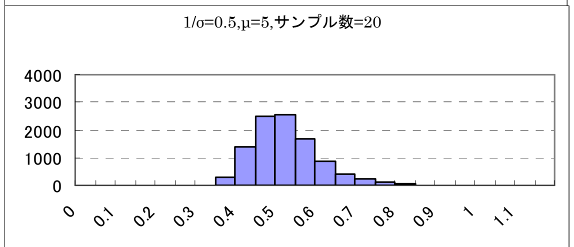




・サンプル数が多いほどばらつきは小さい.

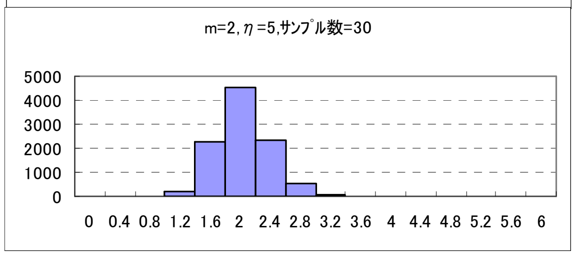
サンプル数:20

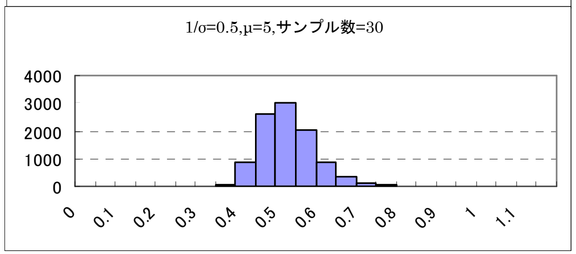




・分布の形状は対数正規のように右に裾をひいたようなもの.

サンプル数:30





→漸近的に正規分布に従うといわれている.

目次

- ◆サンプリングによる推定パラメータのばらつき

ワイブル分布

$$F(t) = \int_0^t \frac{m}{\eta}\left(\frac{s}{\eta}\right)^{m-1} e^{-\left(\frac{s}{\eta}\right)^m} ds = 1\text{-}e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^m} \rightarrow m$$

正規分布

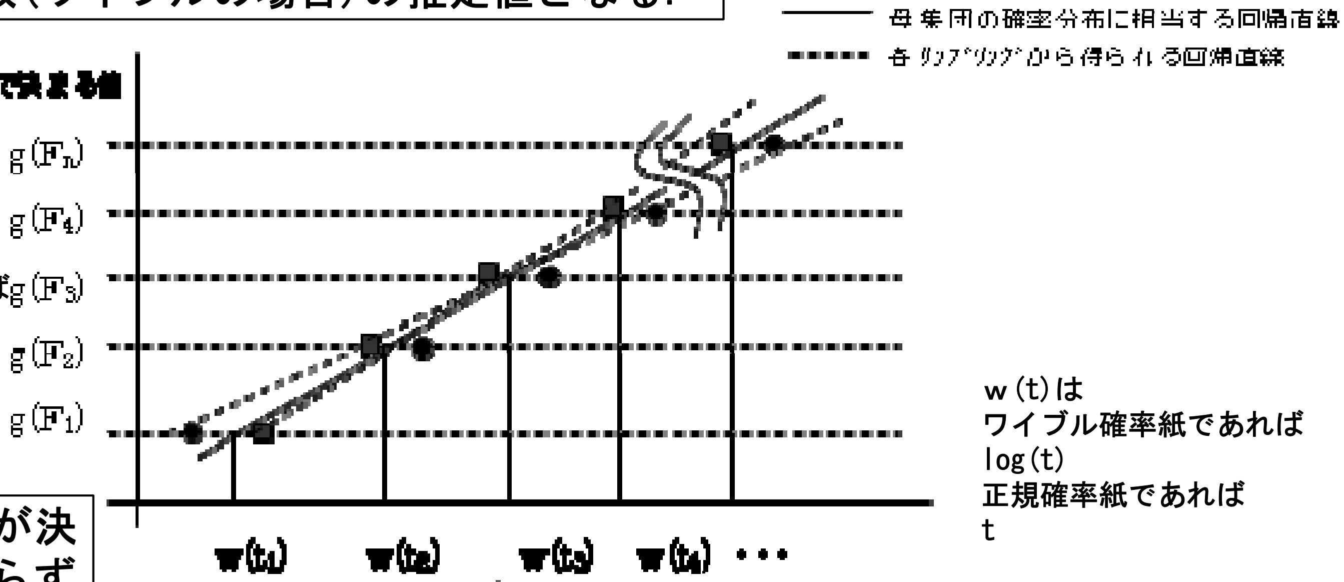
$$F(t) = \int_0^t e^{-\frac{(s-\mu)^2}{2\sigma^2}} ds = \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) \rightarrow 1/\sigma$$

- ◆確率紙でパラメータを推定する仕組み
- ◆確率紙における回帰線の傾きの分散の定式化
- ◆シミュレーション結果との比較
- ◆確率紙における回帰線の傾きの分布を変換
- ◆シミュレーション結果との比較②
- ◆今後

確率紙でパラメータを推定する仕組み

◆回帰線の傾きが形状母数(ワイブルの場合)の推定値となる.

g(F)は
ワイブル確率紙であれば
log(log(1/(1-F))
正規確率紙であれば
NORMINV(F,0,1)

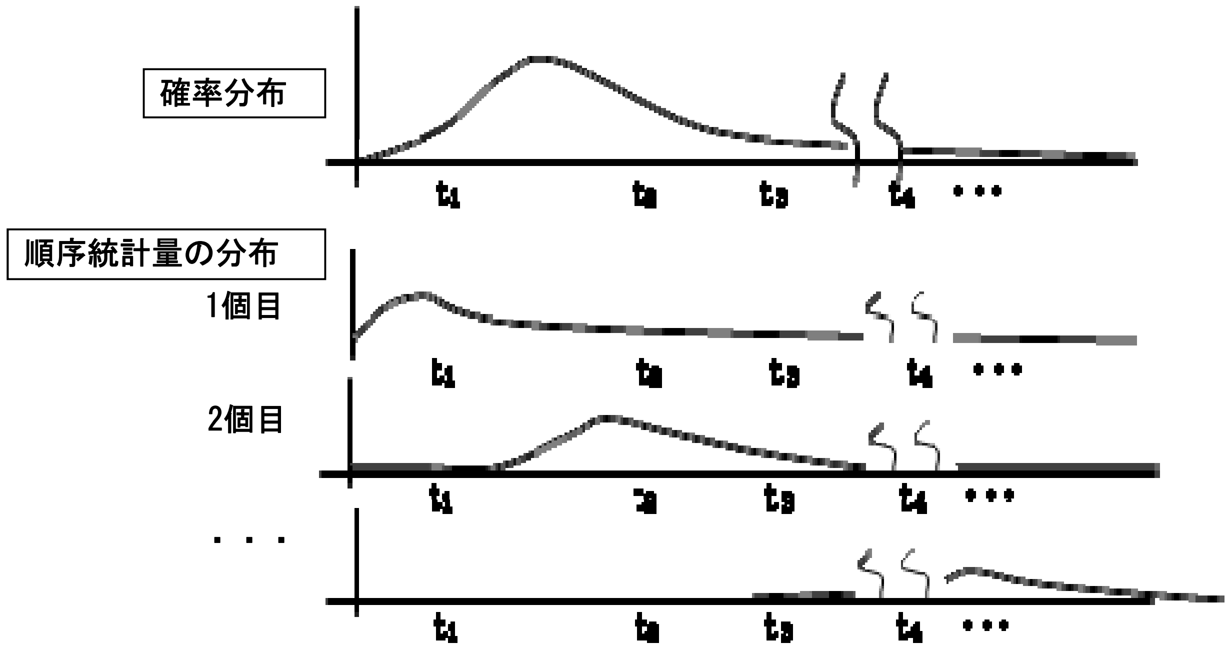


w(t)は
ワイブル確率紙であれば
log(t)
正規確率紙であれば
t

◆縦軸の値はサンプル数が決まるとサンプリングによらず,定数である.

◆故障時間のばらつきは横軸にあらわれる.

順序統計量の分布であらわされる.



◆JUSE-StatWorksの確率紙では回帰式を求める際には,縦軸方向の残差を小さくするモデルを適用している. 傾きの計算は通常のよく知られている式を用いている.

目次

◆サンプリングによる推定パラメータのばらつき

ワイブル分布

$$F(t) = \int_0^t \frac{m}{\eta}\left(\frac{s}{\eta}\right)^{m-1} e^{-\left(\frac{s}{\eta}\right)^m} ds = 1\text{-}e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^m} \rightarrow m$$

正規分布

$$F(t) = \int_0^t e^{-\frac{(s-\mu)^2}{2\sigma^2}} ds = \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) \rightarrow 1/\sigma$$

◆確率紙でパラメータを推定する仕組み

◆確率紙における回帰線の傾きの分散の定式化

◆シミュレーション結果との比較

◆確率紙における回帰線の傾きの分布を変換

◆シミュレーション結果との比較②

◆今後

確率紙における回帰線の傾きの分散の定式化

・最小二乗法で求まる回帰線の傾きaの推定式

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} = \sum_{i=1}^{n} c_i q_i \qquad c_i = y_i - \bar{y} \qquad q_i = \frac{x_i-\bar{x}}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

・確率紙の性質から縦軸の値は定数とみなすことができる.

・x_iは順序統計量であり,q_iは座標変換したものとみなすことができる.

順序統計量の分散共分散の漸近式

※Stuart and Ord(1994),"Kendall's Advanced Theory of Statistics,Vol1:Distribution Theory 6th Edition",John Wiley & Sons Ltd,P356-360.

$$p_2 \le p_1 \qquad \mathrm{cov}(s_1, s_2) = \frac{p_2\cdot(1-p_1)}{n\cdot f(s_1)\cdot f(s_2)}$$

$$p_2 > p_1 \qquad \mathrm{cov}(s_1, s_2) = \mathrm{cov}(s_2, s_1)$$

$$q = \frac{x-\bar{x}}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

ワイブル確率紙の場合(横軸は対数軸)

$$x = \log(t) \qquad f(q) = f^*(t)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right)\cdot t$$

正規確率紙の場合

$$x = t \qquad f(q) = f^*(t)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right)$$

◆回帰線の傾きの分散

$$V(a) = V(\sum_{i=1}^{n} c_i q_i)$$

途中は要旨参照.

$$\cong \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i c_j \,\mathrm{cov}(q_i, q_j)$$

◆漸近正規の仮定から2.5%,97.5%点は以下の式で推定.

$$a_{2.5\%} = a + NORMINV(0.025,0,1)\sqrt{V(a)}$$

$$a_{97.5\%} = a + NORMINV(0.975,0,1)\sqrt{V(a)}$$

目次

◆サンプリングによる推定パラメータのばらつき

ワイブル分布

$$F(t) = \int_0^t \frac{m}{\eta}\left(\frac{s}{\eta}\right)^{m-1} e^{-\left(\frac{s}{\eta}\right)^m} ds = 1\text{-}e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^m}$$

m

正規分布

$$F(t) = \int_0^t \; e^{-\frac{(s-\mu)^2}{2\sigma^2}} ds = \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$$

1/σ

◆確率紙でパラメータを推定する仕組み

◆確率紙における回帰線の傾きの分散の定式化

◆シミュレーション結果との比較

◆確率紙における回帰線の傾きの分布を変換

◆シミュレーション結果との比較②

◆今後

シミュレーション結果との比較

ワイブル確率紙と正規確率紙の1例をそれぞれ,要旨から抜粋

◆ワイブル確率紙

		シミュレーション結果			上式を用いた計算値		
m	ｻﾝﾌﾟﾙ数	分散	2.5%点	97.5%点	分散	2.5%点	97.5%点
2.0	5	1.154	0.7152	4.550	0.8233	0.2215	3.778
	10	0.3555	0.9008	3.227	0.3615	0.8216	3.178
	20	0.1749	1.102	2.757	0.1773	1.175	2.825
	30	0.1237	1.215	2.606	0.1195	1.322	2.678

◆正規確率紙

		シミュレーション結果			上式を用いた計算値		
1/σ	ｻﾝﾌﾟﾙ数	分散	2.5%点	97.5%点	分散	2.5%点	97.5%点
2.0	5	1.059	0.9476	4.636	0.6834	0.3797	3.620
	10	0.2643	1.187	3.159	0.2644	0.9921	3.008
	20	0.1072	1.392	2.678	0.1157	1.333	2.667
	30	0.07084	1.489	2.517	0.07365	1.468	2.532

サンプル数が10以上でよく似た値になっている.
また,ワイブル確率紙よりは正規確率紙の方がよりよい値となっている.

目次

◆サンプリングによる推定パラメータのばらつき

ワイブル分布

$$F(t) = \int_0^t \frac{m}{\eta}\left(\frac{s}{\eta}\right)^{m-1} e^{-\left(\frac{s}{\eta}\right)^m} ds = 1\text{-}e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^m} \rightarrow m$$

正規分布

$$F(t) = \int_0^t e^{-\frac{(s-\mu)^2}{2\sigma^2}} ds = \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) \rightarrow 1/\sigma$$

◆確率紙でパラメータを推定する仕組み

◆確率紙における回帰線の傾きの分散の定式化

◆シミュレーション結果との比較

◆確率紙における回帰線の傾きの分布を変換

◆シミュレーション結果との比較②

◆今後

確率紙における回帰線の傾きの分布を変換

対数正規分布の近似として正規分布を導く変換として以下の関係を用いた.

正規分布の累積分布関数

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(s-\mu)^2}{2\sigma^2}}ds=\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$$

対数正規分布の累積分布関数

$$F(x)=\int_{0}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha s}e^{-\frac{(\log(s)-\beta)^2}{2\alpha^2}}ds=\Phi(\frac{\log(x)-\beta}{\alpha})$$

$\log(x)$ を $x=e^{\beta}$ でテーラー展開し2次項以降を無視すると

$$\log(x)=\log(e^{\beta})+e^{-\beta}(x-e^{\beta})+O((x-e^{\beta})^2)$$

$$\Phi(\frac{\log(x)-\beta}{\alpha})\approx\Phi(\frac{\log(e^{\beta})+e^{-\beta}(x-e^{\beta})-\beta}{\alpha})=\Phi(\frac{x-e^{\beta}}{\alpha e^{\beta}})$$

正規分布と同様な型となる.

パラメータを比較すると以下の関係を得る.

$$\mu=e^{\beta}$$

$$\sigma=\alpha e^{\beta}$$

この関係を用いて対数正規分布に変換し区間推定をおこなった.

目次

◆サンプリングによる推定パラメータのばらつき

ワイブル分布

$$F(t) = \int_0^t \frac{m}{\eta}\left(\frac{s}{\eta}\right)^{m-1} e^{-\left(\frac{s}{\eta}\right)^m} ds = 1\text{-}e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^m} \rightarrow m$$

正規分布

$$F(t) = \int_0^t e^{-\frac{(s-\mu)^2}{2\sigma^2}} ds = \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) \rightarrow 1/\sigma$$

◆確率紙でパラメータを推定する仕組み

◆確率紙における回帰線の傾きの分散の定式化

◆シミュレーション結果との比較

◆確率紙における回帰線の傾きの分布を変換

◆シミュレーション結果との比較②

◆今後

シミュレーション結果との比較②

ワイブル確率紙と正規確率紙の1例をそれぞれ,別紙から抜粋

◆ワイブル確率紙

		シミュレーション結果		対数正規分布を用いた計算値				
m	ｻﾝﾌﾟﾙ数	2.5%点	97.5%点	正規分布で近似時の分散u	$\alpha = \sqrt{u}/m$	β=log(m)	2.5%点	97.5%点
2.0	5	0.7152	4.550	0.8234	0.4537	0.69314	0.8219	4.867
	10	0.9008	3.227	0.3615	0.3006	0.69314	1.110	3.605
	20	1.102	2.757	0.1773	0.2105	0.69314	1.324	3.022
	30	1.215	2.606	0.1195	0.1728	0.69314	1.425	2.806

◆正規確率紙

		シミュレーション結果		対数正規分布を用いた計算値				
1/σ	ｻﾝﾌﾟﾙ数	2.5%点	97.5%点	正規分布で近似時の分散u	$\alpha = \sqrt{u}/m$	β=log(m)	2.5%点	97.5%点
2.0	5	0.9476	4.636	0.6834	0.4133	0.69314	0.8896	4.496
	10	1.187	3.159	0.2644	0.2571	0.69314	1.208	3.310
	20	1.392	2.678	0.1157	0.1701	0.69314	1.433	2.791
	30	1.489	2.517	0.07365	0.1357	0.69314	1.533	2.609

サンプル数が5の場合に改善される．10以上ではあまり精度はよくない．
また,ワイブル確率紙よりは正規確率紙の方がよりよい値となっている．

今後

- ◆偏りの補正方法を検討し,もう少し精度を上げたいと考えている.
- ◆もう一方の母数の区間推定に関しても定式化したいと考えている.
- ◆JUSE-StatWorksにこの機能を搭載する予定である.

■公開資料ページ
弊社ウェブページで各種資料をご覧いただけます　http://www.i-juse.co.jp/statistics/jirei/

■お問い合わせ先
(株)日科技研 数理事業部 パッケージサポート係　http:/www.i-juse.co.jp/statistics/support/contact.html