

## 続・確率紙における推定パラメータの区間推定

(株)日本科学技術研修所

長谷和彦

### 1. 正規分布から対数正規分布へ

要旨集の「確率紙における推定パラメータの区間推定」では、推定パラメータの分布が漸近的に正規分布に従うことから、正規分布を仮定して区間推定を行った。さらに要旨集ではコンピュータシミュレーションで推定パラメータの分布がどのような形状をしているのかも考察したが、対数正規分布のような形状をしていることがわかった。

対数正規分布の近似として正規分布を導くと、対数正規分布のパラメータと正規分布のパラメータの間には満たさなければならない関係が存在する。

そこでその関係を利用し、確率紙における回帰線の傾きは対数正規分布に従うことを仮定した場合の区間推定を行った。

### 2. 対数正規分布の正規分布での近似

正規分布の累積分布関数は以下のとおりである。

$$F(t) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(s-\mu)^2}{2\sigma^2}} ds = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \dots (1)$$

対数正規分布の累積分布関数は以下のとおりである。

$$F(t) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha s} e^{-\frac{(\log(s)-\beta)^2}{2\alpha^2}} ds = \Phi\left(\frac{\log(x)-\beta}{\alpha}\right)$$

そこで  $x = e^\beta$  の近傍での対数正規分布の近似表現を調べる。

$\log(x)$  を  $x = e^\beta$  でテーラー展開し2次項以上を無視して、対数正規分布に当てはめる。

$$\log(x) = \log(e^\beta) + e^{-\beta}(x - e^\beta) + O((x - e^\beta)^2)$$

$$\Phi\left(\frac{\log(x)-\beta}{\alpha}\right) \approx \Phi\left(\frac{\log(e^\beta) + e^{-\beta}(x - e^\beta) - \beta}{\alpha}\right) = \Phi\left(\frac{x - e^\beta}{\alpha e^\beta}\right) \dots (2)$$

(1)式と同様な形になることがわかる。

(1)(2)式より正規分布で近似する場合、正規分布のパラメータ  $\mu, \sigma$  と対数正規分布のパラメータ  $\alpha, \beta$  の間に以下の関係が必要となる。

$$\mu = e^\beta, \quad \sigma = \alpha e^\beta \dots (3)$$

そこで、要旨集で求めた推定パラメータの分布(正規分布)が対数正規分布の近似と仮定し、(3)式を用いて対数正規分布に直して、区間推定を行った。

## 2. ワイブル確率紙, 正規確率紙での結果 -シミュレーション結果との比較

上式の結果とコンピューターシミュレーションの結果を比較した。

ワイブル確率紙(いずれも  $\eta=5$ )

m	サンプル数	シミュレーション結果		対数正規分布を用いた計算値				
		2.5%点	97.5%点	正規分布で近似時の分散 $u$	$\alpha = \sqrt{u}/m$	$\beta = \log(m)$	2.5%点	97.5%点
0.1	5	0.035759246	0.227511109	0.00205841	0.453697035	-2.302585093	0.041097214	0.243325496
	10	0.045038105	0.161349239	0.000903743	0.300623186	-2.302585093	0.055476503	0.180256494
	20	0.055103411	0.13786498	0.000443193	0.210521495	-2.302585093	0.066191737	0.151076259
	30	0.060773792	0.130295843	0.000298729	0.172837785	-2.302585093	0.071265643	0.140320069
0.5	5	0.17879623	1.137555545	0.051460254	0.453697053	-0.693147181	0.205486064	1.21662752
	10	0.225190525	0.806746194	0.022593579	0.300623213	-0.693147181	0.277382502	0.901282517
	20	0.275517054	0.6893249	0.01107982	0.210521448	-0.693147181	0.330958716	0.755381224
	30	0.303868961	0.651479213	0.007468237	0.172837924	-0.693147181	0.35632812	0.701600536
1.0	5	0.35759246	2.275111091	0.205841015	0.453697052	0	0.410972128	2.433255036
	10	0.450381051	1.613492388	0.090374317	0.300623214	0	0.554765003	1.802565041
	20	0.551034109	1.3786498	0.044319282	0.210521453	0	0.661917426	1.510762462
	30	0.607737922	1.302958426	0.029872946	0.172837918	0	0.712656248	1.403201056
2.0	5	0.715184919	4.550222181	0.823364058	0.453697051	0.693147181	0.821944257	4.866510066
	10	0.900762102	3.226984775	0.361497269	0.300623215	0.693147181	1.109530005	3.605130084
	20	1.102068218	2.7572996	0.177277128	0.210521453	0.693147181	1.323834852	3.021524924
	30	1.215475845	2.605916852	0.119491784	0.172837918	0.693147181	1.425312497	2.806402111
5.0	5	1.787962298	11.37555545	5.146025365	0.453697052	1.609437912	2.054860642	12.16627517
	10	2.251905255	8.067461939	2.259357933	0.300623215	1.609437912	2.773825012	9.012825212
	20	2.755170545	6.893249	1.10798205	0.210521453	1.609437912	3.30958713	7.55381231
	30	3.038689612	6.514792129	0.746823653	0.172837919	1.609437912	3.563281239	7.016005283

正規確率紙(いずれも  $\mu=5$ )

1/ $\sigma$	サンプル数	シミュレーション結果		対数正規分布を用いた計算値				
		2.5%点	97.5%点	正規分布で近似時の分散 $u$	$\alpha = \sqrt{u}\sigma$	$\beta = \log(1/\sigma)$	2.5%点	97.5%点
1/0.1	5	4.738016813	23.17783183	17.08558365	0.413347114	2.302585093	4.447933636	22.48234983
	10	5.934754908	15.79734415	6.610530663	0.257109523	2.302585093	6.041544484	16.55205888
	20	6.960152136	13.38852297	2.892627276	0.170077255	2.302585093	7.165227398	13.95629119
	30	7.443409168	12.58562232	1.841240133	0.135692304	2.302585093	7.664758956	13.0467247
1/0.5	5	0.947603363	4.635566366	0.683423346	0.413347114	0.693147181	0.889586727	4.496469965
	10	1.186950982	3.159468829	0.264421227	0.257109523	0.693147181	1.208308896	3.310411777
	20	1.392030427	2.677704594	0.115705091	0.170077255	0.693147181	1.43304548	2.791258238
	30	1.488681834	2.517124463	0.073649605	0.135692304	0.693147181	1.532951792	2.609344939
1/1.0	5	0.473801681	2.317783183	0.170855836	0.413347113	0	0.444793364	2.24823498
	10	0.593475491	1.579734415	0.066105307	0.257109523	0	0.604154448	1.65520589
	20	0.696015214	1.338852297	0.028926273	0.170077256	0	0.716522739	1.395629121
	30	0.744340917	1.258562232	0.018412401	0.135692303	0	0.766475897	1.304672467
1/2.0	5	0.236900841	1.158891592	0.042713959	0.413347113	-0.693147181	0.222396682	1.12411749
	10	0.296737745	0.789867207	0.016526327	0.257109525	-0.693147181	0.302077223	0.827602948
	20	0.348007607	0.669426149	0.007231568	0.170077253	-0.693147181	0.358261371	0.697814556
	30	0.372170458	0.629281116	0.0046031	0.135692299	-0.693147181	0.383237951	0.652336229
1/5.0	5	0.094760336	0.463556637	0.006834233	0.4133471	-1.609437912	0.088958675	0.449646984
	10	0.118695098	0.315946883	0.002644212	0.25710951	-1.609437912	0.120830893	0.331041169
	20	0.139203043	0.267770459	0.001157051	0.170077262	-1.609437912	0.143304546	0.279125827
	30	0.148868183	0.251712446	0.000736496	0.135692299	-1.609437912	0.153295181	0.260934492

サンプル数 10 以上の場合は、要旨集で求めた値のほうが近い値となっているが、サンプル数 5 に関しては改善される。

掲載されている著作物の著作権については，制作した当事者に帰属します。

著作者の許可なく営利・非営利・イントラネットを問わず，本著作物の複製・転用・販売等を禁止します。

所属および役職等は，公開当時のものです。

■公開資料ページ

弊社ウェブページで各種資料をご覧ください <http://www.i-juse.co.jp/statistics/jirei/>

■お問い合わせ先

(株)日科技研 数理事業部 パッケージサポート係 <http://www.i-juse.co.jp/statistics/support/contact.html>